Devoir à la maison n°3 – À rendre le vendredi 12 janvier 2018

Calcul des puissances d'une matrice carrée à l'aide d'un trinôme annulateur

Dans toute la suite, m est un entier au moins égal à 2. On note I_m la matrice identité d'ordre m et O_m la matrice nulle carrée d'ordre m.

Dans tout ce devoir, on considère des trinômes du second degré unitaires c'est-à-dire des trinômes du second degré ayant un coefficient dominant égal à 1. Étant donné un trinôme du second degré unitaire $P(x) = x^2 + ux + v$ (où u et v sont deux réels quelconques) et une matrice carrée M d'ordre m, on note $P(M)$ la matrice définie par

$$P(M) = M^2 + uM + vI_m.$$

Par exemple, si $P(x) = x^2 - 3x + 2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ alors

$$P(M) = M^2 - 3M + 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit, de plus, que $P(x)$ est un trinôme annulateur de M si $P(M) = O_m$.

Partie A. — Exemple et généralités

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $P(x) = x^2 - 5x + 4$ est un trinôme annulateur de A.

2. On suppose que M est une matrice carrée quelconque d'ordre m et que $P(x) = x^2 + ux + v$ est un trinôme annulateur de M.

a. Démontrer que si $P(0) \neq 0$ alors M est inversible.

b. La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ?

3. Soit M une matrice carrée quelconque d'ordre m et $P(x) = x^2 + ux + v$ un trinôme annulateur de M. On suppose que $P(x)$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

a. Montrer que $u = -(r_1 + r_2)$ et que $v = r_1 r_2$.

b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \qquad \text{et} \qquad t_n = \frac{r_1 r_2^n - r_2 r_1^n}{r_1 - r_2}$$

(en convenant que, pour tout réel r, $r^0 = 1$).

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = s_n M + t_n I_m$.

4. On considère à nouveau la matrice A de la question 1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A, n et I_3.

Partie B. — Le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices carrées d'ordre 2

1. Dans cette question, on considère une matrice M carrée d'ordre 2. On écrit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On note de plus, pour tout réel x, $M_x = xI_2 - M$ et $P_M(x) = \det(M_x)$.

a. Démontrer que $P_M(x)$ est un trinôme du second degré unitaire. On exprimera, en particulier, les coefficients de $P_M(x)$ en fonction de a, b, c et d.

b. Démontrer que $P_M(x)$ est un trinôme annulateur de M (*théorème de Cayley-Hamilton*).

2. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton et la question 3.b. de la partie A pour exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n en fonction de B, I_2 et n.

Partie C (facultative)

1. Généraliser la question 3 de la partie B lorsque $P(x)$ admet une unique racine réelle r.

2. En déduire le calcul des puissances de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$