

Devoir à la maison n°3
 À rendre le mercredi 04 janvier 2017

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables : a, b et c sont des nombres réels
 i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

Initialisation : a prend la valeur 1
 b prend la valeur 5

Traitement : Saisir n
 Pour i variant de 2 à n faire
 | c prend la valeur a
 | a prend la valeur b
 | b prend la valeur ...
 Fin Pour

Sortie : Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	31	65	127	257	511	1 025	2 047	4 097	8 191	16 385	32 767	65 537

- b. Au vu de ces résultats, quelles conjectures peut-on émettre concernant
- la monotonie de (u_n) ?
 - le comportement asymptotique de (u_n) ?
 - le chiffre des unités (dans l'écriture décimale) de u_n pour $n \in \mathbb{N}$?
3. Pour tout entier naturel n , on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
 On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = AC_n$.
 Déterminer A et prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n , $C_n = A^n C_0$.
4. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - b. Calculer PDP^{-1} .
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de A^n en fonction n .
6. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$.
7. Démontrer les trois conjectures émises à la question 1.b.
8. (facultatif) Existe-t-il un entier naturel $n \geq 1$ tel que u_n soit le carré d'un entier ?