Correction du devoir à la maison n°3

Exercice 1

1. a. A l'aide de la calculatrice, on trouve $M^2 - 3M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{M^2 - 3M = 4I_3}$.

b. On en déduit que $M(M - 3I_3) = 4I_3$ et donc $M \times \frac{1}{4}(M - 3I_3) = I_3$. Ainsi, M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{4}(M - 3I_3)}$.

c. Remarquons que

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y - 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y - 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 2 \end{cases}.$$

L'écriture matricielle de ce dernier système équivalent à (S) est $MX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dès lors, comme M est inversible, (S) équivaut à $X = M^{-1}B = \frac{1}{4}(M - 3I_3)B$. A l'aide de la calculatrice, on en déduit que (S) équivaut à $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } \left(-\frac{5}{2} \,;\, \frac{1}{2} \,;\, -\frac{3}{2}\right)}$.

2. a. Soit la proposition P_n : « il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI_3$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

Étant donné que $M^0 = I_3 = 0 \times M + 1 \times I_3$, P_0 est vraie en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.

Alors, en utilisant la question 1.a.,

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \times M = (a_kM + b_kI_3)M = a_kM^2 + b_kM \\ &= a_k(3M + 4I_3) + b_kM = (3a_k + b_k)M + 4a_kI_3 \end{aligned}$$

donc P_{k+1} est vraie en posant $a_{k+1} = 3a_k + b_k$ et $b_{k+1} = 4a_k$.

Ainsi, on a montré par récurrence qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_nM + b_nI_3$. De plus, ces deux suites sont définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 4a_n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ 4a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3. a. Le déterminant de P est $\det P = 1 \times 4 - (-1) \times 1 = 5 \neq 0$ donc P est inversible. De plus, $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

c. Considérons la proposition Q_n : « $A^n = PD^nP^{-1}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
Étant donné que $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$, Q_0 est vraie.
Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.
Remarquons que, d'après 3.c, $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kI_2DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, Q_{k+1} est vraie et on a donc démontré par un raisonnement par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

d. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \times 4^n & 4^n \\ -(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 4^n - (-1)^n \\ 4^{n+1} - 4 \times (-1)^n & 4^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc la suite (X_n) est une suite géométrique de matrices de raison A. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$. Or, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 4^n - (-1)^n \\ 4^{n+1} - 4 \times (-1)^n & 4^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^n - (-1)^n}{5} \\ \frac{4^n + 4 \times (-1)^n}{5} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{4^n-(-1)^n}{5} \text{ et } b_n = \frac{4^n+4\times(-1)^n}{5}}$.

4. a. On déduit des questions 2.a. et 4.a. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{4^n-(-1)^n}{5}M + \frac{4^n+4\times(-1)^n}{5}I_3$ i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \times 4^n - (-1)^n & 6(4^n - (-1)^n) & -9(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 2 \times 4^n + 3 \times (-1)^n & -3(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 2(4^n - (-1)^n) & -3 \times 4^n + 8 \times (-1)^n \end{pmatrix}}.$$

b. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors, $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, d'après les relations de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. On en déduit comme précédemment que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$ et donc, d'après la question 4.a.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \times 4^n - (-1)^n \\ 2(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{6 \times 4^n - (-1)^n}{5},\ v_n = w_n = \frac{2(4^n - (-1)^n)}{5}}.$$

Exercice 2. — Notons d_{ij} le terme d'indices i et j de la matrice D pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Comme D est diagonale, par définition, pour tout $i \neq j$, $d_{ij} = 0$.

Une condition nécessaire pour qu'une matrice commute avec D est qu'elle soit carrée d'ordre n. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n qui commute avec D. Le terme d'indice i et j de DM est $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{ik}m_{kj} = d_{ii}m_{ij}$ (puisque $d_{ik} = 0$ si $k \neq i$) et le terme d'indice i et j de MD est $\sum\limits_{k=1}^{n} m_{ik}d_{kj} = m_{ij}d_{jj}$ (puisque $d_{kj} = 0$ si $k \neq j$). Comme D et M commutent, $DM = MD$ et donc, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $d_{ii}m_{ij} = m_{ij}d_{jj}$ i.e. $m_{ij}(d_{ii} - d_{jj}) = 0$.

Or, par hypothèse, les termes diagonaux de D sont tous distincts donc si $i \neq j$, $d_{ii} - d_{jj} \neq 0$ et donc $m_{ij} = 0$. Ainsi, M est diagonale.

Réciproquement, si M est diagonale alors on vérifie sans peine que MD et DM sont aussi diagonales et que pour ces deux matrices le terme d'indices i et i est $m_{ii}d_{ii}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc $MD = DM$.

Ainsi, $\boxed{\text{les matrices qui commutent avec } D \text{ sont les matrices diagonales d'ordre } n}$.