Devoir à la maison n°2

À rendre le lundi 18 octobre 2021

Exercice 1. On considère l'équation $(E) : x^4 - 6y^5 = 2021$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Déterminer le reste de 2021 modulo 6.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. À l'aide d'un tableau, déterminer les restes possibles pour n^4 modulo 6.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2. Puissances entières de la forme $an + b$.

Soit un entier $k \geqslant 2$. On dit qu'un entier m est une puissance k-ième s'il existe un entier u tel que $m = u^k$. Si $k = 2$, on parlera de *carré parfait* plutôt que de *puissance* 2*-ème*.

Par exemple, 25 est un carré parfait car $25 = 5^2$ et 64 est une puissance 3-ième car $64 = 4^3$

1. Dans cette question, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = 4n + 1$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.

(A1) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n soit un carré parfait.

(A2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est un carré parfait.

(A3) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n soit une puissance 3-ième.

(A4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est une puissance 3-ième.

2. Dans cette question, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = 5n + 2$.

a. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles de a^2 modulo 5.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n n'est pas un carré parfait.

3. Dans cette question, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = 4n + 2$.

a. Montrer que si a est un entier pair alors, pour tout $k \geqslant 2$, $a^k \equiv 0$ [4].

b. En déduire que, quel que soit l'entier $k \geqslant 2$, C_n n'est pas une puissance k-ième.

4. (facultatif) Existe-t-il deux entiers strictement positifs a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $an + b$ soit un carré parfait ?