# Devoir à la maison n°2

À rendre le mardi 05 novembre 2019

### Peut-on obtenir un carré en ajoutant des carrés à un carré ?

Soit $k$ un entier au moins égal à 2 et $x_k$ un entier naturel non nul. Le but de ce qui suit est d'étudier, selon les valeurs de $k$ et de $x_k$, l'existence d'entiers naturels non nuls $x_1$, $x_2$, ..., $x_{k-1}$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ soit le carré d'un entier.

## Partie A. — Somme de deux carrés

**1.** Soit $x$ et $y$ deux entiers naturels non nuls.

**a.** Soit $n$ un entier. En utilisant un tableau de restes modulo 4, déterminer les restes possibles de $n^2$ modulo 4.

**b.** En utilisant un tableau à double entrée, déterminer les restes possibles de $x^2 + y^2$ modulo 4.

**c.** Montrer que si $x^2 + y^2$ est un carré alors au moins l'un des deux nombres $x$ ou $y$ est pair.

**2.** Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels non nuls tels que $p > q$. On pose $x_1 = p^2 - q^2$ et $x_2 = 2pq$.

**a.** Justifier que $x_1$ et $x_2$ sont des entiers naturels non nuls.

**b.** Montrer que $x_1^2 + x_2^2$ est le carré d'un entier.

**3.** Soit $y$ un nombre pair au moins égal à 4. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $x$ tel que $x^2 + y^2$ soit le carré d'un entier.

**4.** Le résultat précédent a été montré pour tout entier pair $y$ au moins égal à 4. Est-il vrai :

**a.** si $y = 2$ ? (*Indication.* — Pour tous entiers $x$ et $n$, $x^2 + 2^2 = n^2$ équivaut à $n^2 - x^2 = 4$.)

**b.** pour tout entier naturel non nul $y$ impair ?

## Partie B. — Somme de trois carrés

**1.** Soit $x$, $y$ et $z$ trois entiers naturels non nuls.

**a.** Soit $n$ un entier. En utilisant un tableau de restes modulo 8, déterminer les restes possibles de $n^2$ modulo 8.

**b.** Montrer que si $x^2 + y^2 + z^2$ est un carré alors au moins deux des trois nombres $x$, $y$ ou $z$ sont pairs.

**2.** Soit $z$ un entier naturel non nul.

**a.** Déterminer explicitement deux entiers naturels non nuls $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + 1^2$ soit le carré d'un entier.

**b.** Déduire de la question précédente qu'il existe deux entiers naturels non nuls $x$ et $y$ tels que $x^2 + y^2 + z^2$ soit le carré d'un entier.

## Partie C (facultatif). — Somme de $k$ carrés avec $k \geqslant 4$

Soit un entier $k \geqslant 4$ et $x_k$ un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls $x_1$, $x_2$, ..., $x_{k-1}$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ soit le carré d'un entier.

*Indication.* — On pourra commencer par le cas $k = 4$ puis, pour $k \geqslant 5$, raisonner selon le reste dans la division euclidienne de $k - 1$ par 3.