Devoir à la maison n°2

À rendre le jeudi 08 novembre 2018

L'équation $x^2 + y^2 = a^k$ pour $a \in [\![1, 9]\!]$

Si a et k sont deux entiers naturels tels que $a \geqslant 1$, on note $E_{a,k}$ l'équation

$$x^2 + y^2 = a^k$$

d'inconnue $(x\,;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Ainsi, par exemple, $E_{2,3}$ est l'équation $x^2 + y^2 = 2^3$ i.e. $x^2 + y^2 = 8$ où les inconnues x et y sont deux entiers naturels non nuls.

Le but de ce qui suit est d'étudier l'équation $E_{a,k}$ pour $a \in [\![1, 9]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$.

Partie A. — Le cas $a = 1$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $E_{1,k}$.

2. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Que dire de l'équation $E_{a,0}$?

Partie B. — Les cas $a = 2$, $a = 4$ et $a = 8$

1. Soit n un entier. En utilisant un tableau de restes modulo 4, déterminer les restes possibles de n^2 modulo 4.

2. Soit x et y deux entiers. En utilisant un tableau à double entrée, déterminer les restes possibles de $x^2 + y^2$ modulo 4 et justifier que $x^2 + y^2 \equiv 0$ [4] si et seulement si x et y sont pairs.

3. On va montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $E_{4,k}$ n'a pas de solution. Pour cela, on raisonne pas l'absurde en supposant qu'il existe au moins un entier k tel que $E_{4,k}$ admette au moins une solution. On note alors k_0 le plus petit des entiers naturels k tels que $E_{4,k}$ admette une solution.

a. Montrer que $k_0 \geqslant 1$.

b. Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls u et v tels que $u^2 + v^2 = 4^{k_0 - 1}$.

c. Conclure.

4. Soit k un entier naturel au moins égal à 1.

a. Déduire des questions précédentes que si k est pair alors $E_{2,k}$ n'a pas de solution.

b. On suppose que k est impair et on écrit $k = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer par récurrence sur n que l'unique solution de $E_{2,2n+1}$ est $(x\,;y) = (2^n\,;2^n)$.

5. Déduire des questions précédentes les entiers k tels que $E_{8,k}$ admette au moins une solution et déterminer, pour ces valeurs de k, l'ensemble des solutions de $E_{8,k}$.

Partie C. — Les cas $a = 3$ et $a = 9$

1. Soit n un entier. En utilisant un tableau de restes modulo 3, déterminer les restes possibles de n^2 modulo 3.
2. Soit x et y deux entiers. En utilisant un tableau à double entrée, déterminer les restes possibles de $x^2 + y^2$ modulo 3 et justifier que $x^2 + y^2 \equiv 0$ [3] si et seulement si 3 divise x et y.
3. On va montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $E_{3,k}$ n'a pas de solution. Pour cela, on raisonne pas l'absurde en supposant qu'il existe au moins un entier k tel que $E_{3,k}$ admette au moins une solution. On note alors k_0 le plus petit des entiers naturels k tels que $E_{3,k}$ admette une solution.
   a. Montrer que $k_0 \geqslant 2$.
   b. Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls u et v tels que $u^2 + v^2 = 3^{k_0-2}$.
   c. Conclure.
4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $E_{9,k}$ n'a pas de solution.

Partie D (facultative). — Les cas $a = 5$, $a = 6$ et $a = 7$

1. En suivant la même démarche que pour $a = 3$, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_{7,k}$ n'a pas de solution.
2. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $E_{5,k}$ admet au moins une solution.
3. Que dire de l'équation $E_{6,k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$?