# Devoir à la maison n°2

À rendre le lundi 06 novembre 2017

**Exercice 1**. — On pose $A = 7^{7^{7^{7^{7}}}}$. Le but de l'exercice est de déterminer le chiffre des unités dans l'écriture décimale de $A$.

1. **a.** Quel est le reste de $7^4$ modulo 10 ?

   **b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de $7^n$ modulo 10 en fonction du reste de $n$ modulo 4.

2. Déterminer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le reste de $7^m$ modulo 4 en fonction de la parité de $m$.

3. On pose $B = 7^{7^{7}}$. Quelle est la parité de $B$ ?

4. Déduire des questions précédentes le chiffre des unités dans l'écriture décimale de $A$.

**Exercice 2**. — On considère l'équation (E) : $x^4 + y^4 = 4^n$ d'inconnue $(x\,;y\,;n) \in \mathbb{N}^3$.

Le but de l'exercice est de démontrer que si $(x\,;y\,;n) \in \mathbb{N}^3$ est une solution de (E) alors $x = 0$ ou $y = 0$.

1. Déterminer les solutions de (E) de la forme $(x\,;y\,;0)$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$.

2. Soit $(x\,;y\,;n) \in \mathbb{N}^3$ une solution de (E) telle que $n \neq 0$. On suppose que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

   **a.** En raisonnant modulo 4, démontrer que $x$ et $y$ sont pairs.

   On note $\alpha$ le plus grand entier naturel tel que $2^\alpha$ divise $x$ et $\beta$ le plus grand entier naturel tel que $2^\beta$ divise $y$ ($\alpha$ et $\beta$ existent car $x$ et $y$ sont non nuls). On peut donc écrire $x = 2^\alpha u$ et $y = 2^\beta v$ où $u$ et $v$ sont des entiers naturels impairs. De plus, quitte à échanger $x$ et $y$, on peut supposer que $\alpha \leqslant \beta$.

   **b.** Démontrer que $n - 2\alpha \geqslant 0$ et que $u^4 + 4^{2(\beta-\alpha)}v^4 = 4^{n-2\alpha}$.

   **c.** En raisonnant modulo 4, montrer que $n = 2\alpha$.

   **d.** Aboutir à une contradiction et conclure.

**Exercice 3 (facultatif)**

1. Soit $a$ et $m$ deux entiers naturels. On suppose qu'il existe au moins un entier non nul $k$ tel que $a^k \equiv 1\ [m]$ et on note $d$ le plus petit des entiers non nuls $k$ tels que $a^k \equiv 1\ [m]$.
   Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1\ [m]$ si et seulement si $d$ divise $k$.
   (*Indication.* — On pourra écrire la division euclidienne de $n$ par $d$.)

2. Existe-t-il des entiers naturels $n$ tels que 9 divise $7^n - n^6$ ?