

Correction du devoir à la maison n°2

Exercice 1

1. On écrit que $10^6 = 1\,000\,000 = 7 \times 142\,857 + 1$ donc $10^6 \equiv 1 [7]$.
2. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $4 = 1 + 3$, $4 \equiv 1 [3]$ donc, comme $k - 1 \geq 0$, $4^{k-1} \equiv 1^{k-1} [3]$ i.e. $4^{k-1} \equiv 1 [3]$.
 b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente que 3 divise $4^{k-1} - 1$ donc 4×3 divise $4(4^{k-1} - 1)$ i.e. 12 divise $4^k - 4$. Or, 6 divise 12 donc 6 divise $4^k - 4$ ce qui signifie que $4^k \equiv 4 [6]$.
 c. Étant donné que $10 = 4 + 6$, $10 \equiv 4 [6]$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $10^k \equiv 4^k [6]$ et ainsi, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $10^k \equiv 4 [6]$.
3. Soit $k \in [1, 2016]$. D'après la question 2.c, il existe un entier m tel que $10^k = 4 + 6m$ donc $10^{(10^k)} = 10^{4+6m} = 10^4 \times (10^6)^m$. Or, d'après la question 1, $10^6 \equiv 1 [7]$ donc $(10^6)^m \equiv 1^m [7] \equiv 1 [7]$. De plus, $10^4 = 10\,000 = 7 \times 1\,428 + 4 \equiv 4 [7]$ donc, finalement, $10^{(10^k)} \equiv 4 \times 1 [7] \equiv 4 [7]$. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{2016} 10^{(10^k)} \equiv \sum_{k=1}^{2016} 4 [7] \equiv 2\,016 \times 4 [7] \equiv 8\,064 [7] \equiv 0 [7]$$

car $8\,064 = 1\,152 \times 7$ donc 7 divise 8 064. Ainsi, $\sum_{k=1}^{2016} 10^{(10^k)} \equiv 0 [7]$ ce qui signifie finalement

que $7 \text{ divise } \sum_{k=1}^{2016} 10^{(10^k)}$.

Exercice 2

1. a. Le tableau suivant donne les restes modulo 9 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Ainsi, les restes possibles dans la division euclidienne de n^3 par 9 sont 0, 1 et 8.

- b. Soit x , y et z trois entiers.

Le tableau suivant donne les restes possibles de $x^3 + y^3$ modulo 9 :

$x^3 \backslash y^3$	0	1	8
0	0	1	8
1	1	2	0
8	8	0	7

Ainsi, les restes possibles pour $x^3 + y^3$ modulo 9 sont 0, 1, 2, 7 et 8.

Le tableau suivant donne les restes possibles de $x^3 + y^3 + z^3$ modulo 9 :

$x^3 + y^3 \backslash z^3$	0	1	8
0	0	1	8
1	1	2	0
2	2	3	1
7	7	8	6
8	8	0	7

Ainsi, les restes possibles pour $x^3 + y^3 + z^3$ modulo 9 sont 0, 1, 2, 3, 6, 7, et 8.

Or, $9k + 4 \equiv 4 [9]$ donc, pour tous entiers x, y et z , $9k + 4 \not\equiv x^3 + y^3 + z^3 [9]$. Il s'ensuit qu'il n'existe pas d'entiers x, y et z tels que $9k + 4 = x^3 + y^3 + z^3$ c'est-à-dire $9k + 4$ ne peut pas s'écrire comme la somme de 3 cubes d'entiers.

2. a. Le tableau suivant donne les restes modulo 16 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n^4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ainsi, les restes possibles dans la division euclidienne de n^4 par 16 sont 0 et 1.

b. Notons r le reste de a modulo 16. Supposons qu'il existe m entiers x_1, x_2, \dots, x_m tels que $\sum_{i=1}^m x_i^4 = a$ alors par théorème $\sum_{i=1}^m x_i^4$ et a ont le même reste dans la division par 16 donc r est le reste de $\sum_{i=1}^m x_i^4$ modulo 16. Or, d'après la question 2.a, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $x_i^4 \equiv 0 [16]$ ou $x_i^4 \equiv 1 [16]$ donc, si on note R le nombre d'entiers x_i tels que $x_i^4 \equiv 1 [16]$ alors $0 \leq R \leq m$ et $\sum_{i=1}^m x_i^4 \equiv R [16]$. Par suite, r est aussi le reste de R modulo 16 donc, comme $R \geq 0$, $R \geq r$. Or, $m \geq R$ donc $m \geq r$.

Exercice 3. — Remarquons que $3^2 = 9 \equiv 1 [8]$ donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $3^{2k} + 1 = (3^2)^k + 1 \equiv 2 [8]$ et $3^{2k+1} + 1 = (3^2)^k \times 3 + 1 \equiv 4 [8]$. Ainsi, si q est un entier pair, le reste de $3^q + 1$ modulo 8 est 2 et, si q est impair, le reste de $3^q + 1$ modulo 8 est 4. En particulier, ce reste n'est jamais nul donc, pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, 8 ne divise pas $3^q + 1$.

Supposons que $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ est une solution de l'équation $2^x - 3^y = 1$. Alors, $3^n + 1 = 2^m$. Or, si $m \geq 3$ alors $2^m = 2^3 \times 2^{m-3}$ et $m - 3 \geq 0$ donc 2^{m-3} est un entier ce qui prouve que $2^3 = 8$ divise 2^m . Dès lors, $2^m \equiv 0 [8]$ donc $3^n + 1 \equiv 0 [8]$ i.e. 8 divise $3^n + 1$. Ceci est absurde d'après ce qui précède donc $m \leq 2$. Ainsi, les seules valeurs possibles pour m sont 0, 1 ou 2.

Réciproquement, si $m = 0$ alors $3^n + 1 = 1$ donc $3^n = 0$ ce qui est impossible. Si $m = 1$ alors $3^n + 1 = 2$ donc $3^n = 1$ ce qui est vrai si et seulement si $n = 0$. Enfin, si $m = 2$ alors $3^n + 1 = 4$ donc $3^n = 3$ ce qui est vrai si et seulement si $n = 1$.

On conclut que l'ensemble des solutions dans \mathbb{N}^2 de $2^x - 3^y = 1$ est $\{(1; 0), (2; 1)\}$.