TS3&4 – spécialité mathématiques **octobre 2016**

Devoir à la maison n°2 – À rendre le vendredi 4 novembre 2016

Exercice 1

1. Vérifier que $10^6 \equiv 1\ [7]$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $4^{k-1} \equiv 1\ [3]$.

b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $4^k \equiv 4\ [6]$.

c. Conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $10^k \equiv 4\ [6]$.

3. Déduire des questions précédentes que 7 divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{2\,016} 10^{(10^k)}$.

Exercice 2

1. a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^3 par 9.

b. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que le nombre $9k+4$ ne peut pas s'écrire comme la somme de 3 cubes d'entiers.

2. a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^4 par 16.

b. Soit $a \in \mathbb{N}$ et r le reste de a modulo 16. Démontrer que si le nombre a peut s'écrire comme la somme de m puissances quatrièmes d'entiers alors $m \geqslant r$.

Exercice 3 (facultatif). — Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $2^x - 3^y = 1$ d'inconnue $(x\,;y)$.

TS3&4 – spécialité mathématiques **octobre 2016**

Devoir à la maison n°2 – À rendre le vendredi 4 novembre 2016

Exercice 1

1. Vérifier que $10^6 \equiv 1\ [7]$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $4^{k-1} \equiv 1\ [3]$.

b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $4^k \equiv 4\ [6]$.

c. Conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $10^k \equiv 4\ [6]$.

3. Déduire des questions précédentes que 7 divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{2\,016} 10^{(10^k)}$.

Exercice 2

1. a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^3 par 9.

b. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que le nombre $9k+4$ ne peut pas s'écrire comme la somme de 3 cubes d'entiers.

2. a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^4 par 16.

b. Soit $a \in \mathbb{N}$ et r le reste de a modulo 16. Démontrer que si le nombre a peut s'écrire comme la somme de m puissances quatrièmes d'entiers alors $m \geqslant r$.

Exercice 3 (facultatif). — Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $2^x - 3^y = 1$ d'inconnue $(x\,;y)$.