

Devoir à la maison n°2 – A rendre le vendredi 13 novembre

Exercice 1. — Dans tout cet exercice, lorsqu'on écrit « la somme des chiffres de x », il faut comprendre « la somme des chiffres dans l'écriture décimale de x ».

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $10^n \equiv 1 \pmod{9}$.
- b.** Soit N un entier naturel et S la somme des chiffres de N . Démontrer que $N \equiv S \pmod{9}$.

On pose $A = 2015^{2015}$ et on note B la somme des chiffres de A , C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C .

2. Démontrer que $A \equiv 8 \pmod{9}$ puis que $D \equiv 8 \pmod{9}$.
3. **a.** Démontrer que A s'écrit avec au plus 8 060 chiffres et en déduire que $B \leq 72\,540$.
- b.** De la même façon, montrer que $C \leq 45$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de D .

Exercice 2. — En raisonnant modulo 7, démontrer que l'équation diophantienne $x^2 - 7y^2 = 2015$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

Exercice 3 (facultatif). — Soit $a \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans \mathbb{N}^3 l'équation $x^2 + y^2 = (4a + 3)z^2$ d'inconnue $(x; y; z)$.

Devoir à la maison n°2 – A rendre le vendredi 13 novembre

Exercice 1. — Dans tout cet exercice, lorsqu'on écrit « la somme des chiffres de x », il faut comprendre « la somme des chiffres dans l'écriture décimale de x ».

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $10^n \equiv 1 \pmod{9}$.
- b.** Soit N un entier naturel et S la somme des chiffres de N . Démontrer que $N \equiv S \pmod{9}$.

On pose $A = 2015^{2015}$ et on note B la somme des chiffres de A , C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C .

2. Démontrer que $A \equiv 8 \pmod{9}$ puis que $D \equiv 8 \pmod{9}$.
3. **a.** Démontrer que A s'écrit avec au plus 8 060 chiffres et en déduire que $B \leq 72\,540$.
- b.** De la même façon, montrer que $C \leq 45$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de D .

Exercice 2. — En raisonnant modulo 7, démontrer que l'équation diophantienne $x^2 - 7y^2 = 2015$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

Exercice 3 (facultatif). — Soit $a \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans \mathbb{N}^3 l'équation $x^2 + y^2 = (4a + 3)z^2$ d'inconnue $(x; y; z)$.