

Devoir à la maison n°2 – A rendre le mercredi 05 novembre

Le but de l'exercice est de répondre à la question suivante :

Etant donné un entier n supérieur ou égal à 2, existe-t-il trois entiers x , y et z tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n} ?$$

Première partie – Etude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$.
Montrer que 1, 3 et 5 fournissent une solution au problème.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
 - a. Soit m un entier naturel.
Dresser un tableau donnant les restes possibles de m et de m^2 modulo 8.
 - b. Peut-on trouver trois entiers naturels x , y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}$?

Deuxième partie – Etude du cas général lorsque $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x , y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$.

1. Justifier que l'on est dans l'un des deux cas suivants :
 - ou bien x , y et z sont tous les trois impairs ;
 - ou bien exactement deux des trois entiers x , y et z sont pairs.
2. On suppose dans cette question que x et y sont pairs et que z est impair. Il existe donc trois entiers naturels q , r et t tels que $x = 2q$, $y = 2r$ et $z = 2t + 1$.
 - a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
 - b. En déduire une contradiction.
3. On suppose dans cette question que x , y et z sont tous les trois impairs.
 - a. Prouver que, pour tout entier naturel k , l'entier $k^2 + k$ est divisible par 2.
 - b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{8}$.
 - c. Conclure en s'inspirant de la question **2.b**.
4. Quelle réponse peut-on apporter à la question posée en préambule ?