Corrigé du devoir à la maison n°1

Exercice 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{5n} - 5^{3n}$.

1. On vérifie que $A_0 = 3^0 - 5^0 = 0 = 0 \times 118$, $A_1 = 3^5 - 5^3 = 118 = 1 \times 118$, $A_2 = 3^{10} - 5^6 = 43\,424 = 368 \times 118$ et $A_3 = 12\,395\,782 = 105\,049 \times 118$ donc ils sont tous divisibles par 118.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3^{5(n+1)} - 5^{3(n+1)} = 3^{5n+5} - 5^{3n+3} = 3^{5n} \times 3^5 - 5^{3n} \times 5^3 \\ &= 3^5(A_n + 5^{3n}) - 125 \times 5^{3n} = 3^5 \times A_n + (3^5 - 125) \times 5^{3n} \\ &= 3^5 \times A_n + 118 \times 5^{3n} \end{aligned}$$
donc $\boxed{A_{n+1} = 3^5 \times A_n + 118 \times 5^{3n}}$.
3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « 118 divise A_n ».
On a vu que A_0 est divisible par 118.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, il existe un entier d tel que $A_k = 118d$ donc, grâce à la question précédente,
$$A_{k+1} = 3^5 \times 118d + 118 \times 5^{3n} = 118(3^5 d + 5^{3n})$$
donc, comme $3^5 d + 5^{3n}$ est un entier, 118 divise A^{k+1}. Ainsi, 118 divise A_{k+1}.
On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A_n \text{ est un multiple de } 118}$.

Exercice 2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la proposition suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « quels que soient les entiers consécutifs a_1, a_2, ..., a_n, n divise $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ».

1. La proposition $\mathcal{P}(2)$ est fausse. Par exemple, 2 ne divise pas $0 + 1 = 1$.
2. Considérons trois entiers consécutifs a, b et c. Alors, $b = a + 1$ et $c = a + 2$ donc $a + b + c = 3a + 3 = 3(a + 1)$ donc 3 divise $a + b + c$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
3. La proposition $\mathcal{P}(4)$ est fausse. Par exemple, $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ n'est pas divisible par 4.
Considérons 5 entiers consécutifs a, b, c, d et e. Alors, $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$ et $e = a + 4$ donc $a + b + c + d + e = 5a + 10 = 5(a + 2)$ donc 5 divise $a + b + c + d + e$. Ainsi, $\mathcal{P}(5)$ est vraie.
4. On peut conjecturer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie si et seulement si n est impair.
5. Soit un entier $n \geqslant 2$.
Considérons n entiers consécutifs a_1, a_2, ..., a_n. Alors, $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_2 + 1$, ..., $a_n = a_1 + (n - 1)$ donc
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1 + (1 + 2 + \cdots + (n - 1)) = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}.$$
Supposons que n est impair. Alors, $n - 1$ est pair donc $\frac{n-1}{2}$ est un entier donc n divise $\frac{n-1}{2} \times n$. De plus, n divise na_1 donc n divise S_n. Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Supposons que n est pair. Alors, il existe un entier m tel que $n = 2m$ donc $S_n = na_1 + \dfrac{(n-1) \times 2m}{2} = na_1 + m(n-1) = n(a_1+m) - m$. Si n divise S_n alors n divise $n(a_1+m) - S_n$ i.e. n divise m. Comme n et m sont positifs, ceci implique que $n \leqslant m$ i.e. $2m \leqslant m$ donc, comme $m > 0$, $2 \leqslant 1$ ce qui est absurde. Ainsi, S_n n'est pas divisible par n donc $\mathcal{P}(n)$ est fausse.

On a donc bien montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie si et seulement si n est impair.

6. D'après la question **5.**, si n est pair alors n divise S_n donc le reste dans la division euclidienne de S_n par n est 0.

Si n est pair alors il existe un entier m tel que $n = 2m$ et, comme on l'a vu précédent, $S_n = n(a_1+m) - m = n(a_1+m-1) + n - m = n(a_1+m-1) + m$ donc, comme $0 \leqslant m < n$ (puisque $n = 2m$), on conclut que le reste dans la division euclidienne de S_n par n est $m = \frac{m}{2}$.

Exercice 3. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe des entiers non nuls x et y tels que $4^n = x^2 + y^2$. Considérons alors le plus petit entier naturel n pour lequel il existe des entiers naturels non nuls x et y tels que $4^n = x^2 + y^2$.

Comme x et y sont nuls, $|x| \geqslant 1$ et $|y| \geqslant 1$ donc $x^2 + y^2 \geqslant 2$ donc $n \geqslant 1$ puisque $4^0 = 1$.

Étudions la parité de x et y. Si a est un entier pair alors 2 divise a donc 2 divise a^2 i.e. a^2 est pair. Si a est impair alors il existe un entier k tel que $a = 2k+1$ donc $a^2 + (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2) + 1$ donc a^2 est impair. Ainsi, a et a^2 ont la même parité. Si x et y sont de parité différentes, x^2 et y^2 aussi donc $x^2 + y^2$ est impair, ce qui est impossible car $x^2 + y^2 = 4^n$ avec $n \geqslant 1$. Si x et y sont impairs alors il existe des entiers d et m tels que $x = 2d+1$ et $y = 2m+1$ donc $x^2 + y^2 = (2d+1)^2 + (2m+1)^2 = 4d^2 + 4d + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m + d^2 + d) + 2$. Ainsi, il existe un entier K tel que $4^n = 4K + 2$ donc $2 = 4^n - 4K = 4(4^{n-1} - K)$. Comme $n \geqslant 1$, $4^{n-1} - K$ est un entier donc 4 divise 2, ce qui est absurde.

Ainsi, x et y sont pairs donc il existe des entiers d et m tels que $x = 2d$ et $y = 2m$ donc $4d^2 + 4m^2 = 4^n$ et ainsi $4^{n-1} = d^2 + m^2$. Remarquons que d et m sont non nuls car x et y sont non nuls. Comme $n \geqslant 1$, $n-1$ est un entier naturel tel qu'il existe deux entiers non nuls tels que $4^{n-1} = d^2 + m^2$. Comme $n - 1 < n$, ceci contredit la minimalité de n donc on aboutit à une absurdité.

On conclut donc que, quelle que soit la valeur de n, il n'existe pas d'entiers non nuls tels que $4^n = x^2 + y^2$.