Devoir à la maison n°1

À rendre le lundi 27 septembre 2021

Exercice 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{5n} - 5^{3n}$.

1. Calculer A_0, A_1, A_2 et A_3 et vérifier qu'ils sont tous divisibles par 118.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 3^5 \times A_n + 118 \times 5^{3n}$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un multiple de 118.

Exercice 2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la proposition suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « quels que soient les entiers consécutifs a_1, a_2, ..., a_n, n divise $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ».

1. La proposition $\mathcal{P}(2)$ est-elle vraie ?
2. Montrer que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
3. Les propositions $\mathcal{P}(4)$ et $\mathcal{P}(5)$ sont-elles vraies ?
4. À partir des résultats précédents, émettre une conjecture concernant l'ensemble des entiers naturels $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
5. Démontrer la proposition précédente.
6. Soit un entier $n \geqslant 2$. Considérons n entiers consécutifs a_1, a_2, ..., a_n et posons

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

   Déterminer, selon la valeur de n, le reste dans la division euclidienne de S_n par n.

Exercice 3 (facultatif) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers naturels non nuls x et y tels que $4^n = x^2 + y^2$.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer le plus petit entier naturel n pour lequel il existe des entiers naturels non nuls x et y tels que $4^n = x^2 + y^2$.