

## Devoir à la maison n°1

À rendre le lundi 1<sup>er</sup> octobre 2018

### Partie A

1. Soit  $a \in \mathbb{N}$ . Justifier que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a^N - 1 = (a - 1)(a^{N-1} + a^{N-2} + \cdots + a + 1) \quad \text{i.e.} \quad a^N - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{N-1} a^k.$$

2. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 3 divise  $4^{n+1} - 1$ .

**Partie B.** — On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1.$$

1. Calculer les 4 premiers termes de  $(u_n)$  et vérifier qu'ils sont tous divisibles par 9.
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 4u_n + 3(4^{n+1} - 1)$ .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 9 divise  $u_n$ .

**Partie C.** — Soit  $b$  un entier naturel non nul. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = b^n - 1$ .

1. Soit  $s$  et  $t$  deux entiers naturels non nuls tels que  $s$  divise  $t$ . En utilisant la question 1. de la **Partie A**, montrer que  $B_s$  divise  $B_t$ .
2. Soit  $m$  et  $n$  deux entiers tels que  $0 < m < n$ . On note  $r$  le reste dans la division euclidienne de  $n$  par  $m$ .
  - a. Montrer que  $B_n = b^r B_{n-r} + B_r$ .
  - b. En déduire que le reste dans la division euclidienne de  $B_n$  par  $B_m$  est  $B_r$ .

**Partie D (facultative).** — Soit  $a$  un entier naturel au moins égal à 2. On note  $E$  l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $n - a$  divise  $n^2 - a$ .

1. Soit  $n \in E$ . Démontrer que  $n \leq a^2$ .
2. Montrer que  $a^2 \in E$ .
3. On note  $m$  le nombre d'éléments de  $E$ .
  - a. Montrer que  $4 \leq m \leq a^2$ .
  - b. Donner un exemple d'entier  $a$  tel que  $m = a^2$ .