Corrigé du devoir à la maison n°1

Exercice 1

1. On a :
$u_0 = (a+1)^0 - 0 - 1 = 1 - 1$ donc $\boxed{u_0 = 0}$
$u_1 = (a+1)^1 - a - 1 = a + 1 - a - 1$ donc $\boxed{u_1 = 0}$
$a_2 = (a+1)^2 - 2a - 1 = a^2 + 2a + 1 - 2a - 1$ donc $\boxed{u_2 = a^2}$
sachant que $(a+1)^3 = (a^2+2a+1)(a+1) = a^3 + a^2 + 2a^2 + 2a + a + 1 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$,
$u_3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 1$ donc $\boxed{u_3 = a^3 + 3a^2}$.
Ainsi, $u_0 = u_1 = 0 \times a^2$, $u_2 = 1 \times a^2$ et $u_3 = (a+3) \times a^2$ donc <u>ces quatre entiers sont tous divisibles par a^2</u>.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - (a+1)u_n &= (a+1)^{n+1} - (n+1)a - 1 - (a+1)\left[(a+1)^n - na - 1\right] \\
&= (a+1)^{n+1} - na - a - 1 - (a+1)^{n+1} + na(a+1) + (a+1) \\
&= -na - a - 1 + na^2 + na + a + 1
\end{aligned}$$

donc $\boxed{u_{n+1} - (a+1)u_n = na^2}$.

3. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « a^2 divise u_n ».
On a vu que a^2 divise u_0 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain entier naturel k.
Alors, a^2 divise u_k. Or, a^2 divise a^2 donc a^2 divise $(a+1)u_k - ka^2$ qui est égal à u_{k+1} d'après la question 2. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a^2 \text{ divise } u_n}$.

Exercice 2

1. Il existe un entier q tel que $m = 4q$ ou $m = 4q+1$ ou $m = 4q+2$ ou $m = 4q+3$.
Si $m = 4q$ alors $m^2 = 16q^2 = 4(4q^2) + 0$ donc le reste de m dans la division euclidienne par 4 est 0.
Si $m = 4q+1$ alors $m^2 = (4q+1)^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 4(4q^2 + 2q) + 1$ donc le reste de m dans la division euclidienne par 4 est 1.
Si $m = 4q+2$ alors $m^2 = (4q+2)^2 = 16q^2 + 16q + 4 = 4(4q^2 + 4q + 1)$ donc le reste de m dans la division euclidienne par 4 est 0.
Si $m = 4q+3$ alors $m^2 = (4q+3)^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 4(4q^2 + 6q + 2) + 1$ donc le reste de m dans la division euclidienne par 4 est 1.
Ainsi, $\boxed{\text{les restes possibles dans la division euclidienne de } m^2 \text{ par 4 sont 0 et 1}}$.

2. D'après la question 1, il existe des entiers q_1, q_2, r_1 et r_2 tels que $u^2 = 4q_1 + r_1$ et $v^2 = 4q_2 + r_2$ avec $r_1 \in \{0,1\}$ et $r_2 \in \{0,1\}$.
Dès lors, $n = 4q_1 + r_1 + 4q_2 + r_2 = 4(q_1 + q_2) + r_1 + r_2$ avec $r_1 + r_2$ qui vaut :
- 0 si $r_1 = r_2 = 0$,
- 1 si $r_1 = 1$ et $r_2 = 0$ ou $r_1 = 0$ et $r_1 = 1$,
- 2 si $r_1 = r_2 = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{les restes possibles dans la division euclidienne de } n^2 \text{ par 4 sont 0, 1 et 2}}$.

3. Soit $q \in \mathbb{Z}$. Supposons que l'équation $x^2 + y^2 = 4q + 3$ admette une solution $(u\,;v)$ dans $\mathbb{Z}^2$. Alors, $u^2 + v^2 = 4q + 3$ donc, comme q est entier, le reste de $u^2 + v^2$ dans la division euclidienne par 4 est 3. Or, ceci est impossible d'après la question 2 donc <u>l'équation $x^2 + y^2 = 4q + 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$</u>.

Exercice 3 (facultatif). — Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Écrivons la division euclidienne de a par b : il existe deux entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Dès lors,

$$2^a + 1 = 2^{bq+r} + 1 = 2^r \times (2^b)^q + 1 = 2^r \left[(2^b)^q - 1\right] + 2^r + 1 = 2^r \frac{(2^b)^q - 1}{2^b - 1}(2^b - 1) + 2^r + 1.$$

Remarquons que, puisque $b > 0$, $2^b \neq 1$ et donc

$$\frac{(2^b)^q - 1}{2^b - 1} = \sum_{j=0}^{q-1} (2^b)^j$$

donc ce nombre est un entier que nous notons N. En posant $q = 2^r N$, il vient

$$(*)\ 2^a + 1 = q(2^b - 1) + 2^r + 1.$$

Si $2^r + 1 < 2^b - 1$ alors, comme $2^r + 1 \geqslant 0$, $(*)$ est la division euclidienne de $2^a + 1$ par $2^b - 1$. En particulier, le reste de cette division est $2^r + 1$ qui n'est pas nul (car $2^r > 0$) donc $2^b - 1$ ne divise pas $2^a + 1$.

Sinon, $2^r + 1 \geqslant 2^b - 1$ donc $2^b - 2^r \leqslant 2$. Or, $0 \leqslant r < b$ donc $2^b - 2^r > 0$. Ainsi, comme $2^b - 2^r$ est entier, $2^b - 2^r = 1$ ou $2^b - 2^r = 2$.

Si $r > 0$, $2^b - 2^r$ est pair donc si $2^b - 2^r = 1$ alors $r = 0$ et donc $b = 1$. Dans ce cas, $2^b - 1 = 1$ divise $2^a + 1$.

Si $2^b - 2^r = 2$ alors $2^r(2^{b-r} - 1) = 2$ ce qui impose que $2^r = 2$ i.e. $r = 1$ et $2^{b-r} - 1 = 1$ donc $b - r = 1$ i.e. $b = 2$. De plus, on a alors $a = 2q + 1$ i.e. a est un nombre impair. Réciproquement, si $b = 2$ et a est impair (donc $r = 1$) alors $2^b - 1 = 3$ et, grâce à $(*)$, $2^a + 1 = 3q + 2^1 + 1 = 3(q + 1)$ donc $2^b - 1 = 3$ divise $2^a + 1$ puisque $q + 1 \in \mathbb{Z}$.

On conclut que l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $2^b - 1$ divise $2^a + 1$ est l'ensemble des couples de la forme $(a\,;1)$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ ou de la forme $(a\,;2)$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ impair i.e. $\{(a\,;1) \mid a \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2q + 1\,;2) \mid q \in \mathbb{N}\}$.