

Devoir à la maison n°1

À rendre le vendredi 29 septembre 2017

Exercice 1. — Soit $a \in \mathbb{N}$.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (a + 1)^n - an - 1$.

1. Calculer les 4 premiers termes de (u_n) et vérifier qu'ils sont tous divisibles par a^2 .
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - (a + 1)u_n$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^2 divise u_n .

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de m^2 par 4.
2. Soit u et v deux entiers et $n = u^2 + v^2$. Déduire de la question précédente les restes possibles dans la division euclidienne de n par 4.
3. Soit $q \in \mathbb{Z}$. Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 = 4q + 3$ d'inconnue $(x; y)$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

Exercice 3 (facultatif). — Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $2^b - 1$ divise $2^a + 1$.

Devoir à la maison n°1

À rendre le vendredi 29 septembre 2017

Exercice 1. — Soit $a \in \mathbb{N}$.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (a + 1)^n - an - 1$.

1. Calculer les 4 premiers termes de (u_n) et vérifier qu'ils sont tous divisibles par a^2 .
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - (a + 1)u_n$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^2 divise u_n .

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de m^2 par 4.
2. Soit u et v deux entiers et $n = u^2 + v^2$. Déduire de la question précédente les restes possibles dans la division euclidienne de n par 4.
3. Soit $q \in \mathbb{Z}$. Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 = 4q + 3$ d'inconnue $(x; y)$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

Exercice 3 (facultatif). — Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $2^b - 1$ divise $2^a + 1$.