Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 28 septembre 2016

Partie A. — On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3^{4n+1} + 2$.

1. Vérifier que les 3 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 5.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 81u_n - 160$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, 5 divise u_n.

Partie B

1. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier $N \geqslant 1$,

$$x^N - 1 = (x-1)\sum_{j=0}^{N-1} x^j.$$

2. Retrouver le résultat de la question 3 de la partie A. (On pourra appliquer le résultat de la question précédente avec $x = 3^4 = 81$.)

Partie C. — Soit a un entier naturel non nul. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a^n - 1$.

1. Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que p divise q. Déduire de la question 1. de la partie B que A_p divise A_q.

2. On considère deux entiers n et m tels que $0 < m < n$. On note r le reste dans la division euclidienne de n par m.

a. Montrer que $A_n = a^r A_{n-r} + A_r$.

b. En déduire que A_r est le reste dans la division euclidienne de A_n par A_m.

Exercice facultatif. — Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $\{d_1, d_2, ..., d_m\}$ l'ensemble des diviseurs positifs de n indexés de telle sorte que $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$.

Démontrer que, pour tout entier k compris entre 1 et m, $d_k \leqslant \dfrac{n}{m-k+1}$ et en déduire que

$$\sum_{k=2}^{m} d_{k-1}d_k < n^2.$$

On pourra remarquer que, pour tout entier k compris entre 1 et m,

$$\frac{n^2}{(m-k+2)(m-k+1)} = \frac{n^2}{m-k+1} - \frac{n^2}{m-k+2}$$