Correction du devoir à la maison n°1

Exercice 1.

1. Étant donné que $u(0) = 13 = 1 \times 13$, $u(1) = 3\,367 = 259 \times 13$ et $u(2) = 1\,959\,685 = 150\,745 \times 13$, $\underline{\text{les 3 premiers termes de } (u_n) \text{ sont bien divisibles par 13}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{3(n+1)+2} + 5^{4(n+1)+1} - 1 = 3^{3n+5} + 5^{4n+5} - 1 = 3^3 \times 3^{3n+2} + 5^4 \times 5^{4n+1} - 1 \\ &= 27 \times 3^{3n+2} + 625 \times 5^{4n+1} - 1 = 27 \times 3^{3n+2} + (598 + 27) \times 5^{4n+1} - 27 + 26 \\ &= 27(3^{3n+2} + 5^{4n+1} - 1) + 598 \times 5^{4n+1} + 26 = 27u_n + 598 \times 5^{4n+1} + 26 \end{aligned}$$

On a donc démontré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 27u_n + 598 \times 5^{4n+1} + 26}$.

3. Soit la proposition P_n : « 13 divise u_n ».
On a vu que u_0 est divisible par 13 donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, 13 divise u_k donc il existe une entier d tel que $u_k = 13d$. Or, d'après la question 2,

$$u_{k+1} = 27u_k + 598 \times 5^{4n+1} + 26 = 27 \times 13du_k + 13 \times 46 \times 5^{4n+1} + 2 \times 13 = 13\left[27du_k + 46 \times 5^{4n+1} + 2\right]$$

donc, comme $27du_k + 46 \times 5^{4n+1} + 2$ est entier, 13 divise u_{k+1}.
Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 13 \text{ divise } u_n}$.

Exercice 2.

1. Pour tous réels x et y,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2x - 4y - 8 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - (y^2 + 4y) - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 - \left[(y+2)^2 - 4\right] - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y+2)^2 = 5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{une équation de } \mathscr{H} \text{ est } (x-1)^2 - (y+2)^2 = 5}$ (i.e. $a = 1$, $b = -2$ et $c = 5$).

2. Soit $M\,(x\,;y)$ un point de $\mathscr{H}$ dont les deux coordonnées sont entières. Alors, $(x-1)^2-(y+2)^2 = 5$ donc $[(x-1)-(y+2)]\,[(x-1)+(y+2)] = 5$ i.e. $(x-y-3)(x+y+1) = 5$. Or, comme x et y sont des entiers, on en déduit que $x-y-3$ et $x+y+1$ forment un couple de diviseurs de 5.
Comme les diviseurs de 5 sont -5, -1, 1 et 5, on est dans l'un des cas suivants :
$\underline{1^{\text{er}}\text{ cas}}$: $x-y-3 = -5$ et $x+y+1 = -1$ i.e. $x-y = -2$ et $x+y = -2$ d'où l'on tire $x = -2$ et $y = 0$;
$\underline{2^{\text{ième}}\text{ cas}}$: $x-y-3 = -1$ et $x+y+1 = -5$ i.e. $x-y = 2$ et $x+y = -6$ d'où l'on tire $x = -2$ et $y = -4$;
$\underline{3^{\text{ième}}\text{ cas}}$: $x-y-3 = 1$ et $x+y+1 = 5$ i.e. $x-y = 4$ et $x+y = 4$ d'où l'on tire $x = 4$ et $y = 0$;
$\underline{4^{\text{ième}}\text{ cas}}$: $x-y-3 = 5$ et $x+y+1 = 1$ i.e. $x-y = 8$ et $x+y = 0$ d'où l'on tire $x = 4$ et $y = -4$.
Les points possibles sont donc $M_1\,(-2\,;0)$, $M_2\,(-2\,;-4)$, $M_3\,(4\,;0)$ et $M_4\,(4\,;-4)$.
Réciproquement, on vérifie que ces 4 points appartiennent bien à $\mathscr{H}$ car, si M est l'un de ces quatre points, $|x_M - 1| = 3$ et $|y_M + 2| = 2$, donc $(x_M-1)^2 - (y_M+2)^2 = 9 - 4 = 5$.
On conclut que les points $\mathscr{H}$ à coordonnées entières sont les points

$$\boxed{M_1\,(-2\,;0)\,,\quad M_2\,(-2\,;-4)\,,\quad M_3\,(4\,;0)\quad \text{et}\quad M_4\,(4\,;-4)}.$$

Exercice 3. (facultatif) — Supposons que $(m\,;n) \in \mathbb{N}^2$ soit une solution de l'équation $2^m + 1 = n^3$. Alors, comme $m \geq 0$, $2^m \geq 1$ donc $n^3 \geq 2$ et ainsi $n \geq 2$. Dès lors, $n^3 \geq 8$ donc $2^m = n^3 - 1 \geq 7$ et donc $m \geq 1$. On en déduit que 2^m est un nombre pair donc $2^m + 1$ est impair. Comme le produit de plusieurs facteurs dont l'un au moins est pair est également pair, par contraposée, si un produit est impair alors tous les facteurs sont impairs. On en déduit que, comme n^3 est impair, n est également impair. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{N}$ (car $n \in \mathbb{N}$) tel que $n = 2k + 1$.

Dès lors, $2^m = (2k+1)^3 - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 1 = 2k(4k^2 + 6k + 3)$. En divisant par 2, on en déduit que $2^{m-1} = k(2(2k^2 + 3k + 1) + 1)$. Ainsi, $2(2k^2 + 3k + 1) + 1$ est un diviseur positif impair de 2^{m-1} (qui est bien entier car $m \geq 1$). Or, le seul diviseur positif impair d'une puissance de 2 est 1 donc $2(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 1$ i.e. $2(2k^2 + 3k + 1) = 0$ et ainsi $2k^2 + 3k + 1 = 0$. Or, comme $k \geq 0$, $2k^2 + 3k + 1 \geq 1$. On aboutit donc à une absurdité.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{N}^2 \text{ de l'équation } 2^m + 1 = n^3 \text{ est vide}}$.