Correction du devoir à la maison n˚1

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1. On a $u_0 = 7 = 7 \times 1$, $u_1 = 35 = 7 \times 5$, $u_2 = 259 = 7 \times 37$, $u_3 = 2219 = 7 \times 317$ et $u_4 = 19747 = 7 \times 2821$ donc $\boxed{\text{les 5 premiers termes de } (u_n) \text{ sont divisibles par 7}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$u_{n+1} = 3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 2(3^{2n+1} + 2^{n+1}) + 7 \times 3^{2n+1}$$
donc $\boxed{u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}}$.
3. Soit la proposition P_n : « 7 divise u_n ».
Comme $u_0 = 7 = 7 \times 1$, P_0 est vraie.
Supposons P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, 7 divise u_k donc il existe un entier K tel que $u_k = 7K$ donc, par la question précédente, $u_{k+1} 7K + 7 \times 3^{2n+1} = 7(K + 3^{2n+1})$. Etant donné que $K + 3^{2n+1}$ est entier, on conclut que 7 divise u_{k+1} i.e. P_{k+1} est vraie.
On a ainsi démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est divisible par 7}}$.

Exercice 2.

1. Supposons que $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$ vérifie l'équation $x^2 - 35 = y^2$. Alors, $x^2 - y^2 = 35$ i.e. $(x-y)(x+y) = 35$.donc $(x - y\,; x + y)$ est un couple de diviseurs de 35. Comme x et y sont positifs, $x + y \geq 0$ et donc $x - y \geq 0$. De plus, comme $y \geq 0$, $x - y \leq x + y$. On en déduit que $(x - y\,; x + y)$ est l'un des couples $(1\,;35)$ ou $(5\,;7)$. Par suite, $(x\,;y)$ est l'un des couples $(18\,;17)$ ou $(6\,;1)$.
Réciproquement, on vérifie que $18^2 - 35 = 289 = 17^2$ et $6^2 - 35 = 1 = 1^2$ donc $\underline{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{N}^2 \text{ de } x^2 - 35 = y^2 \text{ est } \{(18\,;17)\,;(6\,;1)\}}$.
2. La forme canonique $x^2 + 6x - 26$ est $(x + 3)^2 - 9 - 26$ i.e. $\boxed{(x + 3)^2 - 35}$.
3. Remarquons que, pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{N}^2$, $a(a+6) = b^2 + 26$ si et seulement si $a^2 + 6a - 26 = b^2$ i.e. d'après la question 2, si et seulement si $(a+3)^2 - 35 = b^2$. De plus, si a et b sont des entiers naturels alors $a + 6$ et b également. Dès lors, d'après la question 1, $(a\,;b)$ est solution $a(a + 6) = b^2 + 26$ si et seulement si $(a + 3\,;b) = (18\,;17)$ ou $(a + 3\,;b) = (6\,;1)$ i.e. si et seulement si $(a\,;b) = (15\,;17)$ ou $(a\,;b) = (3\,;1)$. On conclut que $\underline{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{N}^2 \text{ de } a(a + 6) = b^2 + 26 \text{ est } \{(15\,;17)\,;(3\,;1)\}}$.

Exercice 3. — Remarquons que $6^n - 1 = 3^n 2^n - 1 = 3^n \times 2 \times 2^{n-1} - 1 = (2 \times 3^n)2^{n-1} - 1 = (2 \times 3^n - 1)2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$. Comme $n \geq 1$, $B = 2^{n-1} \geq 1$ donc $0 \leq 2^{n-1} - 1 < 2^{n-1}$ donc $\underline{\text{le reste dans la division euclidienne de } 6^n - 1 \text{ par } 2^{n-1} \text{ est } 2^{n-1} - 1}$.

Exercice 4. — Supposons qu'un entier n soit racine du polynôme P. Alors, $an^3 + bn^2 + cn + 1 = 0$ donc $n(an^2 + bn + c) = -1$ et, comme $an^2 + bn + c$ est un entier, il s'ensuit que n divise -1. Ainsi, $n = 1$ ou $n = -1$. Ainsi, les seules racines entières possibles pour P sont 1 et -1.

Or, $P(1) = 0$ si et seulement si $a + b + c + 1 = 0$ i.e. $a + b + c = -1$ et $P(-1) = 0$ si et seulement si $a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + c \times (-1) + 1 = 0$ i.e. $a - b + c = -1$.

On conclut donc que $\underline{P \text{ admet des racines dans } \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } a + b + c = -1 \text{ ou } a - b + c = -1}$.