Devoir à la maison n˚1

A rendre le mercredi 1er octobre 2014

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1. Vérifier que les 5 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 7.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}$.

3. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise u_n.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - 35 = y^2$ d'inconnue $(x\,;y)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire le trinôme $x^2 + 6x - 26$ sous forme canonique.

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $a(a+6) = b^2 + 26$ d'inconnue $(a\,;b)$.

Exercice 3. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $6^n - 1$ par 2^{n-1}.

Pour aller plus loin (facultatif)

Exercice 4. — Soit a, b et c trois entiers. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ admette une racine dans $\mathbb{Z}$.

Terminales S3&4 – spécialité mathématiques septembre 2014

Devoir à la maison n˚1

A rendre le mercredi 1er octobre 2014

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1. Vérifier que les 5 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 7.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}$.

3. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise u_n.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - 35 = y^2$ d'inconnue $(x\,;y)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire le trinôme $x^2 + 6x - 26$ sous forme canonique.

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $a(a+6) = b^2 + 26$ d'inconnue $(a\,;b)$.

Exercice 3. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $6^n - 1$ par 2^{n-1}.

Pour aller plus loin (facultatif)

Exercice 4. — Soit a, b et c trois entiers. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ admette une racine dans $\mathbb{Z}$.