

Devoir à la maison n°1

A rendre le vendredi 4 octobre 2013

Exercice 1. — Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8 si et seulement si n est impair. (On pourra faire un raisonnement par disjonction des cas selon que n est pair ou impair).

Exercice 2. — On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1. Vérifier que les 5 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 7.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}$.
3. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise u_n .

Exercice 3.

1. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier $k \geq 1$,

$$x^k - 1 = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1).$$

2. Soit a un entier naturel non nul. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a^n - 1$.

- a. Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Démontrer que si p divise q alors A_p divise A_q .
(Indication : on pourra appliquer la question 1 en prenant $x = a^p$ et une valeur bien choisie pour k .)

On considère, dans la suite, deux entiers n et m tels que $0 < m < n$. On note r le reste dans la division euclidienne de n par m .

- b. Montrer que $A_n = a^r A_{n-r} + A_r$.
- c. Justifier que A_m divise A_{n-r} et en déduire le reste dans la division euclidienne de A_n par A_m .

Pour aller plus loin (facultatif)

Exercice 4. — Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que la somme de n entiers quelconques est divisible par n si et seulement si n est impair.

Exercice 5. — Un facteur apporte une lettre à une dame. Ils se mettent à discuter sur le pas de la porte et le facteur dit à la dame :

- Vous avez trois filles, n'est-ce pas ?
 - C'est exact, lui répond la dame.
 - Et quel âge ont-elles ? demande le facteur.
 - Le produit de leurs âges est égal à 36 et la somme de leurs âges est égale au numéro de la porte d'en face.
- Le facteur se retourne, hésite, puis dit :
- Il me manque un renseignement.
 - En effet, répond la dame, l'aînée est blonde...
- Faites comme le facteur, trouvez l'âge de chacune des trois filles.