⧫ Chapitre 2. — Nombres complexes : aspects algébriques

Une introduction historique

Au XVIe siècle, divers mathématiciens italiens (del Ferro, Tartaglia, Ferrari et Cardan) ont travaillé sur la résolution des équations du type $x^3 = px + q$ où p et q sont des nombres entiers. Dans son ouvrage *Ars Magna* (1545), Cardan montre qu'une telle équation a pour solution

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} \quad \text{avec } \Delta = 27q^2 - 4p^3$$

où $\sqrt[3]{a}$ désigne la racine cubique de a c'est-à-dire l'unique réel b tel que $b^3 = a$. Cette formule porte depuis le nom de formule de Cardan même si on pense que del Ferro l'avait découverte dès 1515.

Évidemment, la formule de Cardan n'a de sens que si $\Delta \geqslant 0$. Cependant, contrairement au cas du second degré, une équation du 3ième degré admet toujours au moins une solution réelle (que Δ soit positif ou négatif). Ceci conduit le mathématicien Bombelli à essayer de donner un sens à la formule de Cardan même dans le cas où Δ est négatif. Dans son ouvrage *Algebra* (1572), il s'intéressa plus particulièrement à l'équation

$$x^3 = 15x + 4$$

pour laquelle $\Delta = -13068$ et donc $\dfrac{\Delta}{108} = -121 = -11^2$. Il eut alors l'idée d'inventer deux quantités imaginaires qu'il baptisa *pui di meno* (abrégé en *pdm*) et *meno di meno* (abrégé en *mdm*) qu'il considère probablement comme de nouveaux signes (à ajouter aux traditionnels + (pui) et − (meno)) et il propose une sorte de nouvelle « règle des signes » telle qu'on ait toujours

« + par + = + », « + par − = − » et « − par − = + »

mais également les nouvelles règles

« + par *pdm* = *pdm* » « − par *pdm* = *mdm* »
« *pdm* par *pdm* = − » « *pdm* par *mdm* = + »

ainsi que

« + par *mdm* = *mdm* » « − par *mdm* = *pdm* »
« *mdm* par *pdm* = + » « *mdm* par *mdm* = − »

Par la suite, la quantité *pdm* sera considérée comme un nombre *imaginaire* noté $\sqrt{-1}$ avant que le mathématicien suisse Euler ne lui donne sa notation définitive en lui attribuant en 1777 la lettre i (comme *imaginaire*). Avec cette notation (et en considérant i comme un nombre et non plus comme un « signe »), la quantité *mdm* correspond au nombre *imaginaire* $-\mathrm{i}$ et les règles précédentes deviennent :

$$1 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}, \quad (-1) \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1 \quad \text{et} \quad \mathrm{i} \times (-\mathrm{i}) = 1$$

et

$$1 \times (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}, \quad (-1) \times (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}, \quad (-\mathrm{i}) \times \mathrm{i} = 1 \quad \text{et} \quad (-\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i}) = -1.$$

En gardant ces notations bien postérieures (mais bien plus pratiques !), revenons alors à la formule de Cardan. Etant donné que $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$, $(11\mathrm{i})^2 = -121$ donc Bombelli considéra qu'on pouvait prendre pour $\sqrt{\dfrac{\Delta}{108}}$ le nombre *imaginaire* 11i. La formule de Cardan devient donc

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 11\mathrm{i}}.$$

Il restait alors à Bombelli à trouver un nombre A tel que $A^3 = 2 + 11\mathrm{i}$ et un nombre B tel que $B^3 = 2 - 11\mathrm{i}$. Ici, on ne sait pas vraiment comment il a procédé, probablement à tâtons, mais il trouve les valeurs

$$A = 2 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad B = 2 - \mathrm{i}.$$

Finalement, la formule de Cardan donne

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} = 2 + \mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} = 4.$$

Or, on vérifie que

$$4^3 = 64 = 15 \times 4 + 4$$

donc, aussi étonnant que cela puisse paraître, l'introduction de ces quantités *imaginaires* conduit à trouver l'une des solutions réelles de $x^3 = 15x + 4$ (mais ce n'est pas la seule).

Par la suite, les nombres *imaginaires* et la notation i introduite par Euler seront popularisés par le mathématicien allemand Gauss qui les rebaptisera *nombres complexes* et généralisera ce qu'on appelle aujourd'hui la *forme algébrique* d'un nombre complexe à savoir l'écriture $a + \mathrm{i}b$ où a et b sont des réels.

I. — Définitions

Théorème 1. — Admis

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout nombre réel est un nombre complexe.
2. Les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) connues sur $\mathbb{R}$ se prolongent à l'ensemble $\mathbb{C}$ avec les mêmes règles opératoires.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont des réels. Cette écriture s'appelle la forme algébrique de z.

Définition 2

Soit z un nombre complexe. On écrit $z = a + \mathrm{i}b$ sous forme algébrique. Alors,

1. Le nombre réel a est appelé la partie réelle de z. On la note $\mathrm{Re}(z)$.
2. Le nombre réel b est appelé la partie imaginaire de z. On la note $\mathrm{Im}(z)$.

⚠ Si z est un nombre complexe alors, par définition, la partie imaginaire de z est un nombre réel.

Exemple 3.

1. $z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$ est un nombre complexe, $\mathrm{Re}(z_1) = 3$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -4$.
2. $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ est un nombre complexe, $\mathrm{Re}(z_2) = -1$ et $\mathrm{Im}(z_2) = \sqrt{3}$.
3. $z_3 = \frac{1}{2}$ est un nombre complexe, $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_1) = 0$.
4. $z_4 = -0{,}7\mathrm{i}$ est un nombre complexe, $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -0{,}7$.

Définition 4

Soit z un nombre complexe. On dit que z est imaginaire pur si $\mathrm{Re}(z) = 0$. L'ensemble des imaginaires purs se note $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exemple 5. Ainsi, $\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $-5\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ mais $1 + 2\mathrm{i} \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$.

L'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique entraîne immédiatement les propriétés suivantes.

Propriété 6

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaires. En particulier, un nombre complexe z est nul si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$.

Propriété 7

Soit z un nombre complexe. On écrit $z = a + ib$ sous forme algébrique. Alors,

1. z est réel si et seulement si $b = 0$.
2. Le nombre 0 est le seul nombre complexe a être à la fois réel et imaginaire pur.

II. — Calculs dans $\mathbb{C}$

1) Addition et soustraction

Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous forme algébriques alors

$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b').$$

On a donc $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

On procède de même pour la soustraction :

$$z - z' = (a + \mathrm{i}b) - (a' + \mathrm{i}b') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b').$$

On a donc $\mathrm{Re}(z - z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z - z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$.

2) Multiplication

Pour la multiplication, on procède par distributivité comme dans $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\mathrm{i}^2 = -1$. Ainsi, si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous forme algébriques alors
$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b).$$

Les propriétés de distributivité étant les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$, on dispose dans $\mathbb{C}$ des mêmes identités remarquables : pour tous complexes z et z',
$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \qquad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \qquad (z - z')(z + z') = z^2 - z'^2.$$

En particulier, on peut remarquer que, pour tous réels a et b,
$$(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

3) Inverse et quotient

Comme pour les réels, tout nombre complexe non nul possède un unique inverse i.e. pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$. On note ce inverse z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

Pour déterminer cet inverse, on chasse les i du dénominateur en multipliant $a + \mathrm{i}b$ par $a - \mathrm{i}b$ de sorte à faire apparaître une identité remarquable. Ainsi, si $z = a + \mathrm{i}b$ est un complexe non nul écrit sous forme algébrique alors
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

De même, si z et z' sont deux complexes tels que $z' \neq 0$, on peut définir le quotient $\frac{z}{z'}$ par $z \times \frac{1}{z'}$. Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient, on procède alors comme pour l'inverse : si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous forme algébrique tels que $z' \neq 0$ alors
$$\frac{z}{z'} = \frac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b')}{(a' + \mathrm{i}b')(a' - \mathrm{i}b')} = \frac{aa' - \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' - \mathrm{i}^2bb'}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \mathrm{i}\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

Le produit, l'inverse et le quotient ne sont pas compatibles avec la partie réelle et la partie imaginaire i.e., en général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et de même pour l'inverse et le quotient.

4) Puissances entières

Soit z un nombre complexe et n un entier relatif. Si $n > 0$, on pose $z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ fois}}$, si $n = 0$, on pose $z^n = 1$ et, si $n < 0$, on pose $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} = \dfrac{1}{\underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{-n \text{ fois}}}$.

Exemple 8. On considère les nombres complexes $z = 1 + 2\mathrm{i}$ et $z' = 2 - \mathrm{i}$. Alors,
$$\begin{aligned}
z + z' &= 1 + 2\mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} = 3 + \mathrm{i} \\
z - z' &= 1 + 2\mathrm{i} - (2 - \mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i} \\
zz' &= (1 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = 2 - \mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + 3\mathrm{i} + 2 = 4 + 3\mathrm{i} \\
\frac{1}{z} &= \frac{1}{1 + 2\mathrm{i}} = \frac{1 - 2\mathrm{i}}{(1 + 2\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})} = \frac{1 - 2\mathrm{i}}{1 + 2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i} \\
\frac{z}{z'} &= \frac{1 + 2\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \frac{(1 + 2\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})} = \frac{2 + \mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{2^2 + 1^2} = \frac{2 + 5\mathrm{i} - 2}{5} = \mathrm{i}
\end{aligned}$$

5) Équations

Les équations se résolvent dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.

Exemple 9. Considérons l'équation $z+2=(3+2\mathrm{i})z-1+\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(E) \Leftrightarrow z-(3+2\mathrm{i})z=-1+\mathrm{i}-2 \Leftrightarrow (-2-2\mathrm{i})z=-3+\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\frac{-3+\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{(-3+\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}{(-2)^2+(-2)^2} \Leftrightarrow z=\frac{6-6\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2}{8}=\frac{4-8\mathrm{i}}{8}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right\}$.

Propriété 10

Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Démonstration. Soit z et z' deux nombres complexes tels que $zz'=0$. Supposons $z \neq 0$. Alors, en multipliant par $\frac{1}{z}$, on obtient $z'=\frac{1}{z}\times 0=0$. Ainsi, soit $z=0$, soit $z'=0$. □

Exemple 11.

1. Considérons l'équation (F) $(\mathrm{i}z-1)(z-\mathrm{i})=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(F) \Leftrightarrow \mathrm{i}z-1=0 \text{ ou } z-\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\mathrm{i}} \text{ ou } z=\mathrm{i} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i} \text{ ou } z=\mathrm{i}.$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$.

2. Considérons l'équation (G) $z^2+1=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(G) \Leftrightarrow z^2+1^2=0 \Leftrightarrow (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})=0 \Leftrightarrow z-\mathrm{i}=0 \text{ ou } z+\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow z=\mathrm{i} \text{ ou } z=-\mathrm{i}.$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$.

III. — Conjugaison

Définition 12

Soit z un nombre complexe. Si z s'écrit sous forme algébrique $z=a+ib$ alors le nombre complexe $a-ib$ est appelé le nombre complexe conjugué de z et on le note $\overline{z}$ (ce qui se lit « z barre »).

Exemple 13.

1. Si $z_1=1+3\mathrm{i}$ alors $\overline{z_1}=1-3\mathrm{i}$.
2. Si $z_2=3\mathrm{i}-2$ alors $\overline{z_2}=-2-3\mathrm{i}$.
3. Si $z_3=-4$ alors $\overline{z_3}=-4$.
4. Si $z_4=\mathrm{i}\sqrt{3}$ alors $\overline{z_4}=-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
5. Si $z_5=3+\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$ alors la forme algébrique de z_5 est $z_5=3+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2+2\mathrm{i}$ donc $\overline{z_5}=2-2\mathrm{i}$.

Propriété 14

Soit z et z' deux complexes. Alors,

1. $z = z'$ si et seulement si $\overline{z} = \overline{z'}$.
2. $\overline{\overline{z}} = z$.
3. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$.
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
5. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
6. $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On écrit z et z' sous forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. $z = z' \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ -b = -b' \end{cases} \Leftrightarrow a - \mathrm{i}b = a' - \mathrm{i}b' \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$
2. $\overline{\overline{z}} = \overline{a - \mathrm{i}b} = a - (-\mathrm{i}b) = a + \mathrm{i}b = z$.
3. $z + \overline{z} = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = a + \mathrm{i} - (a - \mathrm{i}b) = 2ib = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$.
4. On sait que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 0$ ce qui équivaut à $2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z) = 0$ i.e. $z - \overline{z} = 0$. Ainsi, $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$.
5. On sait que $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = 0$ ce qui équivaut à $2\operatorname{Re}(z) = 0$ i.e. $z + \overline{z} = 0$. Ainsi, $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\overline{z}$.
6. $z\overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^b + b^2 \in \mathbb{R}$.

□

Propriété 15

Soit z et z' deux complexes et n un entier. Alors,

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$. En particulier, si $k \in \mathbb{R}$, $\overline{kz} = k\overline{z}$.
4. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration. On écrit z et z' sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. $\overline{z + z'} = \overline{a + \mathrm{i}b + a' + \mathrm{i}b'} = \overline{(a + a') + \mathrm{i}(b + b')} = (a + a') - \mathrm{i}(b + b') = a - \mathrm{i}b + a' - \mathrm{i}b' = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z - z'} = \overline{a + \mathrm{i}b - (a' + \mathrm{i}b')} = \overline{(a - a') + \mathrm{i}(b - b')} = (a - a') - \mathrm{i}(b - b') = a - \mathrm{i}b - (a' - \mathrm{i}b') = \overline{z} - \overline{z'}$.
3. On a
$$\begin{aligned} \overline{zz'} = \overline{(a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b')} = \overline{aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b)} &= aa' - bb' - \mathrm{i}(ab' + a'b) \\ &= aa' + \mathrm{i}^2 bb' - \mathrm{i}ab' - \mathrm{i}a'b = a(a' - \mathrm{i}b') + \mathrm{i}b(\mathrm{i}b' - a') \\ &= (a + \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') = \overline{z}\,\overline{z'} \end{aligned}$$
4. Supposons $z' \neq 0$. Alors, comme $z' \times \frac{1}{z'} = 1$, d'après le point **3.**, $\overline{z'}\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z\frac{1}{z'}} = \overline{1} = 1$ donc $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$.
   Dès lors, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z}\,\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z}\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

5. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ».
Comme $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \overline{z}^0$, P_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, grâce au point **3.**,

$$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k} \times \overline{z} = \overline{z}^k \times \overline{z} = \overline{z}^{k+1}$$

donc P_{k+1} est vraie. On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Enfin, si $n < 0$, alors

$$\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{\overline{z}^{-n}} = \overline{z}^n$$

donc l'égalité est établie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Exemple 16. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = \dfrac{2z+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$. Alors,

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{2z+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right)} = \frac{\overline{2z+\mathrm{i}}}{\overline{3-2\mathrm{i}}} = \frac{\overline{2z}+\overline{\mathrm{i}}}{3+2\mathrm{i}} = \frac{\overline{2}\overline{z}-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = \frac{2\overline{z}-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$$

Exemple 17.

1. Considérons l'équation $(H) : 2\overline{z} + \mathrm{i} = 3 + 5\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(H) \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{3+5\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{3}{2} + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - 2\mathrm{i}$$

donc l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right\}$.

2. Considérons l'équation $(K) : z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 3 + \mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Pour résoudre (K), on écrit l'inconnue z sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$. Alors,

$$(K) \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b + 2\mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) = 3 + \mathrm{i} \Leftrightarrow a + 2b + \mathrm{i}(b + 2a) = 3 + \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2b \\ 2(3-2b) + b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2b \\ 6 - 3b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2 \times \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\mathrm{i}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (K) est $\left\{-\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 18. Soit z un complexe différent de 1. On note $z' = \dfrac{\overline{z}(z+1)}{\overline{z}-1}$. Montrer que le nombre complexe $Z = \dfrac{z'-1}{z-1}$ est un réel.

Solution. On a

$$Z = \frac{\frac{\overline{z}(z+1)}{\overline{z}-1} - 1}{z-1} = \frac{\overline{z}(z+1) - (\overline{z}-1)}{\overline{z}-1} \times \frac{1}{z-1} = \frac{z\overline{z}+1}{(\overline{z}-1)(z-1)}.$$

Or, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ et $(\overline{z}-1)(z-1) = \overline{(z-1)}(z-1) \in \mathbb{R}$ donc $Z \in \mathbb{R}$.