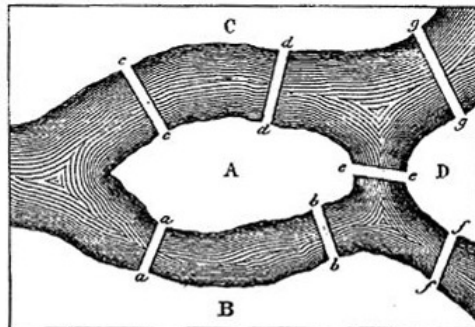


# ◆ Chapitre 6. — Graphes

## Introduction

En 1736, le mathématicien suisse Leonhard Euler s'intéressa au problème connu sous le nom de *Problème des ponts de Königsberg* dont voici l'énoncé :

« À Königsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras, sur lesquels sont jetés les sept ponts  $a, b, c, d, e, f, g$ . Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns, impossible, disent les autres; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. »



À votre avis, un tel parcours est-il possible ? Si oui, donner un exemple.

Ce problème est considéré aujourd'hui comme l'acte fondateur d'une théorie beaucoup plus vaste appelée *théorie des graphes*.

## I. — Définitions

### 1) Notion de graphe

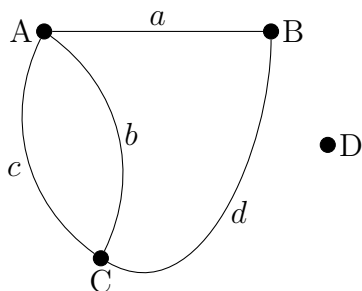
#### Définition 1

Un graphe (non orienté)  $\mathcal{G}$  est la donnée de deux ensembles :

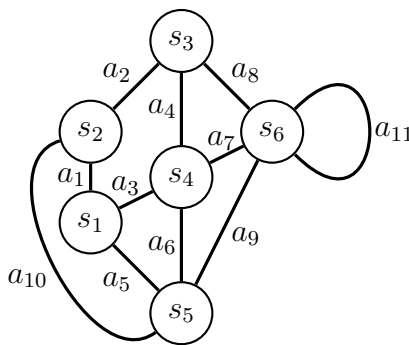
1. un ensemble fini et non vide  $\mathcal{S}$  dont les éléments sont appelés les *sommets* du graphe ;
2. un (multi)ensemble fini (éventuellement vide)  $\mathcal{A}$  formé de paires d'éléments de  $\mathcal{S}$ . Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés les *arêtes* du graphe.

*Remarque 2.* La meilleure façon de présenter un graphe est d'en donner une représentation. Un sommet est représenté par un point (ou un cercle) et une arête par un arc (ou un segment) reliant deux sommets.

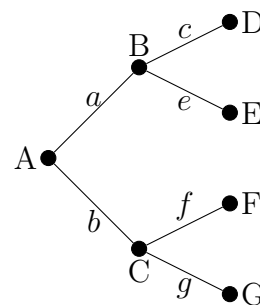
#### Exemple 3.



Graphe  $\mathcal{G}_1$



Graphe  $\mathcal{G}_2$



Graphe  $\mathcal{G}_3$

Le graphe  $\mathcal{G}_1$  a 4 sommets et 4 arêtes, le graphe  $\mathcal{G}_2$  a 6 sommets et 11 arêtes et le graphe  $\mathcal{G}_3$  a 7 sommets et 6 arêtes.

**Exercice 4.**

1. Donner une représentation du graphe associé au problème des ponts de Königsberg.
2. Donner des exemples de graphes rencontrés dans la vie de tous les jours.

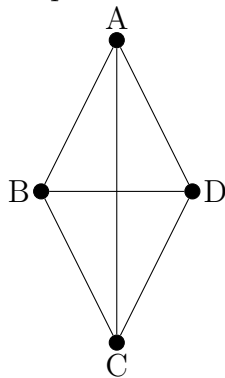
**Définition 5**

Soit  $\mathcal{G}$  un graphe, A et B deux sommets de  $\mathcal{G}$  et  $c$  et  $d$  deux arêtes de  $\mathcal{G}$ .

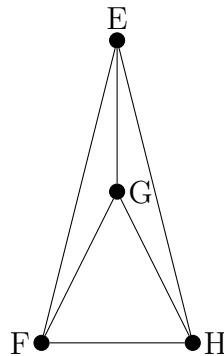
1. Si  $c = \{A, B\}$ , on dit que A et B sont les *extrémités* de  $c$ .
2. Si A est une extrémité de  $c$ , on dit que  $c$  est *incidente* à A.
3. Si aucune arête n'est incidente à A, on dit que A est un point *isolé*.
4. On dit que A et B sont *adjacents* s'il existe une arête ayant pour extrémités A et B.
5. Si les deux extrémités de  $c$  sont confondues, on dit que  $c$  est une *boucle*.
6. Si  $c$  et  $d$  ont les mêmes extrémités, on dit que  $c$  et  $d$  sont des arêtes *parallèles*.

**Exemple 6.** Illustrer ces définitions en utilisant les graphes de l'exemple 3.

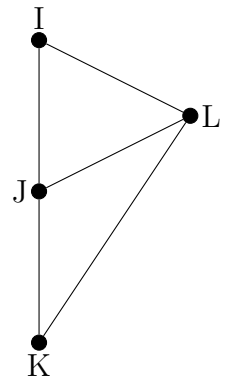
*Remarque 7.* Un même graphe peut avoir plusieurs représentations différentes.



Graphe  $\mathcal{G}_4$



Graphe  $\mathcal{G}_5$



Graphe  $\mathcal{G}_6$

Les graphes  $\mathcal{G}_4$  et  $\mathcal{G}_5$  sont identiques et le graphe  $\mathcal{G}_6$  leur est différent.

**Définition 8**

Le nombre de sommets d'un graphe  $\mathcal{G}$  est appelé l'*ordre* de  $\mathcal{G}$ .

**Exemple 9.** Dans l'exemple 3, l'ordre de  $\mathcal{G}_1$  est 4, l'ordre de  $\mathcal{G}_2$  est 6 et l'ordre de  $\mathcal{G}_3$  est 7.

**Définition 10**

On dit qu'un graphe est

1. *simple* s'il ne contient pas de boucle ni d'arêtes parallèles ;
2. *complet* s'il est simple et si tous les sommets sont deux à deux adjacents.

**Exemple 11.** En reprenant les graphes  $\mathcal{G}_1$  à  $\mathcal{G}_6$  ci-dessus, remplir le tableau suivant avec OUI ou NON :

graphe	$\mathcal{G}_1$	$\mathcal{G}_2$	$\mathcal{G}_3$	$\mathcal{G}_4$	$\mathcal{G}_5$	$\mathcal{G}_6$
simple						
complet						

**Exemple 12.** Représenter tous les graphes simples d'ordre 1, d'ordre 2 et d'ordre 3.

*Remarque 13.* Un graphe complet est donc un graphe dans lequel chaque sommet est relié à tous les autres par une et une seule arête. Étant donné un entier  $n \geq 1$ , il n'y a donc qu'un seul graphe complet d'ordre  $n$ . On le note généralement  $K_n$ .

**Exercice 14.** Donner une représentation de  $K_2$ , de  $K_3$ , de  $K_4$  et de  $K_5$ .

## 2) Degré d'un sommet

### Définition 15

On appelle *degré* d'un sommet  $A$  le nombre d'arêtes incidentes à  $A$ , une boucle étant donc comptée 2 fois. On dit, de plus, qu'un sommet est *pair* (respectivement *impair*) si son degré est pair (respectivement impair).

**Exemple 16.** Déterminer les degrés des sommets des graphes de l'exemple 3.

**Exercice 17.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le degré d'un sommet quelconque de  $K_n$ .

### Propriété 18. — Lemme des poignées de main

Dans un graphe (non orienté), la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

### Corollaire 19

Dans un graphe (non orienté), le nombre de sommets impairs est pair.

**Exemple 20.** Un club de tennis de table comprend 15 membres. Ce club organise un tournoi au cours duquel chaque membre rencontre 7 adversaires différents. Comment organiser le tournoi ?

## 3) Graphe orienté

Il est parfois nécessaire dans un graphe d'orienter les arêtes c'est-à-dire d'indiquer un sens de parcours entre deux sommets adjacents. C'est le cas, par exemple, si on veut représenter le plan d'une ville avec des sens uniques.

### Définition 21

Un graphe orienté est un graphe dans lequel les arêtes ne sont plus des paires de sommets mais des couples de sommets. On parle alors d'arc orienté plutôt que d'arête. De plus, si  $c = (A, B)$  est un arc orienté formé par deux sommets  $A$  et  $B$ , on dit que  $A$  est l'origine (extrémité initiale) de  $c$  et que  $B$  est l'extrémité terminale (ou finale) de  $c$ .

*Remarque 22.* Graphiquement, on traduit l'orientation du graphe par des flèches sur les arcs.

**Exemple 23.** Dans une ville, un parcours touristique doit passer par 4 monuments  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  qui sont relativement proches. On sait que  $A$  est relié à  $B$  par une rue en double sens, que  $A$  est relié à  $C$  par une rue en sens unique, que  $B$  est relié à  $D$  par une rue à double sens, que  $C$  est relié à  $B$  par une rue en sens unique et que  $D$  est relié à  $A$  par une rue en sens unique. Traduire ces données par un graphe :

1. en supposant qu'on fasse le parcours en voiture (et donc en tenant compte des sens uniques);
2. en supposant qu'on fasse le parcours à pied (et donc sans tenir compte des sens uniques).

## 4) Matrice d'adjacence

### Définition 24

On considère un graphe  $\mathcal{G}$  ayant  $n$  sommets numérotés  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .

1. Si  $\mathcal{G}$  n'est pas orienté, on appelle matrice d'adjacence de  $\mathcal{G}$  la matrice  $M = (m_{ij})$  où  $m_{ij}$  est le nombre d'arêtes ayant comme extrémités  $s_i$  et  $s_j$ .
2. Si  $\mathcal{G}$  est orienté, on appelle matrice d'adjacence de  $\mathcal{G}$  la matrice  $M = (m_{ij})$  où  $m_{ij}$  est le nombre d'arêtes ayant comme origine  $s_i$  et comme extrémité terminale  $s_j$ .

**Exemple 25.** Déterminer la matrice d'adjacence des deux graphes de l'exemple 3 en ordonnant les points selon l'ordre alphabétique.

*Remarque 26.*

1. Une matrice d'adjacence est toujours une matrice carrée dont l'ordre est l'ordre du graphe.
2. La matrice d'un graphe non orienté est toujours symétrique mais ce n'est en général pas le cas pour la matrice d'un graphe orienté.
3. La matrice d'un graphe simple n'est constituée que de 0 et de 1 et tous les coefficients diagonaux sont nuls.
4. La somme des coefficients de la  $i$ -ème ligne de la matrice d'un graphe simple non orienté est égal au degré du  $i$ -ème sommet (et c'est aussi la somme des coefficients de la  $i$ -ème colonne). La propriété 18 permet donc de dire que la somme de tous les termes d'une telle matrice est égale au double du nombre d'arêtes.
5. Un graphe est entièrement déterminé par sa matrice donc deux représentations sont associées au même graphe si et seulement si elles ont la même matrice d'adjacence.

## II. — Chaînes, cycles et connexité

Les graphes servent souvent à modéliser des parcours passant par différents lieux comme pour le problème de ponts de Koenigsberg par exemple. Des questions naturelles se posent : peut-on aller d'un lieu à un autre ? En combien d'étapes ? Peut-on passer par chaque lieu une fois et une seule ? Peut-on revenir au point de départ...

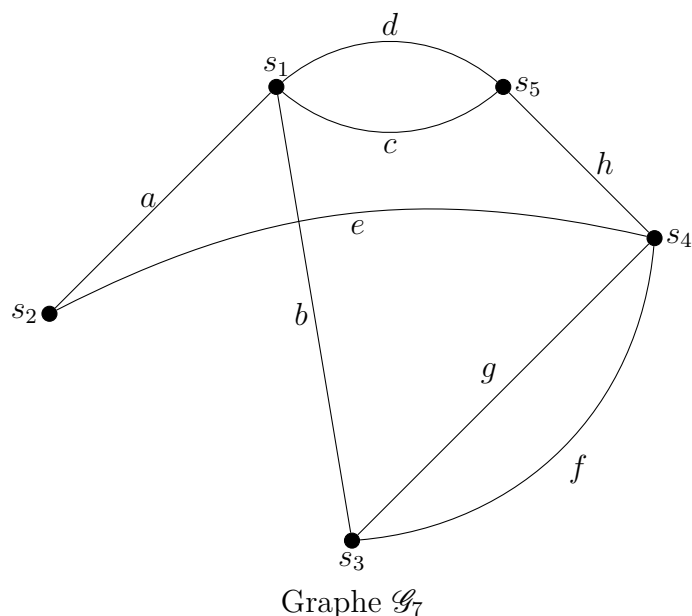
Ces questions sont liées en théorie des graphes aux notions de chaînes et de cycles qui sont la traduction mathématiques de « parcours » ou de « chemins » entre deux points.

### 1) Chaînes et cycles

#### Définition 27

On considère un graphe  $\mathcal{G}$  non orienté. Une *chaîne* de  $\mathcal{G}$  est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes telle qu'une arête soit toujours encadrée par ses deux extrémités.

**Exemple 28.** On considère le graphe ci-dessous. Donner 3 chaînes passant par tous les sommets une seule fois et une chaîne passant par toutes les arêtes une seule fois.



*Remarque 29.*

1. Une chaîne commence et se termine toujours par des sommets appelés *origine* et *extrémité finale* de la chaîne.
2. La donnée d'une liste de sommets ou d'une liste d'arêtes (même ayant un point commun) ne définit pas forcément une chaîne. Ainsi, dans l'exemple 28,  $s_1, s_5, s_4$  peut correspondre à deux chaînes différentes :  $s_1, c, s_5, h, s_4$  ou  $s_1, d, s_5, h, s_4$ . De même,  $c, h, d$  ne définit pas une chaîne car la liste ne pourrait commencer que par  $s_1, c, s_5, h, s_4$  et  $s_4$  n'est pas une extrémité de  $d$ .

Cependant, pour un graphe simple, la donnée d'une chaîne équivaut à la donnée des sommets (puisque entre deux sommets adjacents, il n'y a qu'une seule arête donc pas de choix possible).

### Définition 30

1. La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent (une même arête pouvant être comptée plusieurs fois).
2. On dit qu'une chaîne est *simple* si toutes ses arêtes sont distinctes.
3. On dit qu'une chaîne est *fermée* si l'origine et l'extrémité finale sont confondues.
4. On dit qu'une chaîne est un *cycle* si elle est à la fois fermée et simple.
5. Un cycle de longueur  $k$  est aussi appelé un  $k$ -cycle.

**Exemple 31.** En reprenant le graphe de l'exemple 28, donner :

1. une chaîne de longueur 7 ne passant que par 3 points ;
2. une chaîne simple passant par les 5 points ;
3. une chaîne fermée passant par les 5 points sans être un cycle ;
4. un cycle passant par les 5 points.

*Remarque 32.* On peut adapter les définitions précédentes à un graphe orienté. On conserve le même vocabulaire en ajoutant le mot *orienté*. On parlera, par exemple, de *chaîne orientée* ou de *cycle orienté*.

## 2) Chaînes de longueurs données

### Théorème 33

Soit  $\mathcal{G}$  un graphe (orienté ou non) et  $M$  sa matrice d'adjacence. Pour tout entier  $n \geq 1$ , le nombre de chaînes de longueurs  $n$  joignant le sommet  $s_i$  au sommet  $s_j$  est le coefficient d'indices  $i$  et  $j$  dans la matrice  $M^n$ .

**Exemple 34.** On reprend le graphe de l'exemple 28. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 entre  $s_2$  et  $s_4$ .

## 3) Connexité

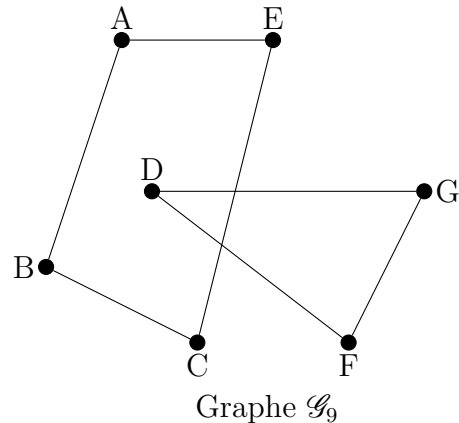
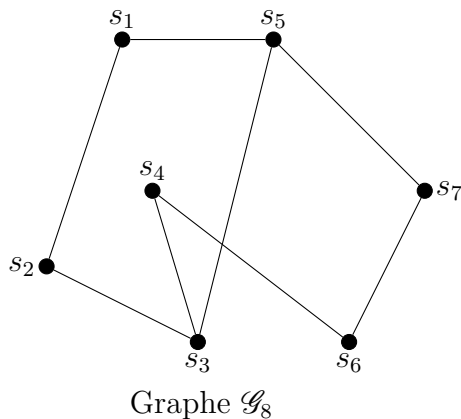
### Définition 35

Un graphe  $\mathcal{G}$  est dit *connexe* si, pour tous sommets A et B distincts de  $\mathcal{G}$ , il existe une chaîne de  $\mathcal{G}$  ayant A pour origine et B pour extrémité finale.

*Remarque 36.*

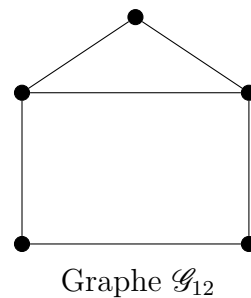
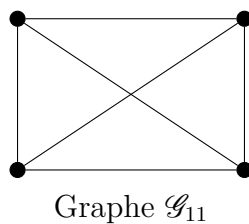
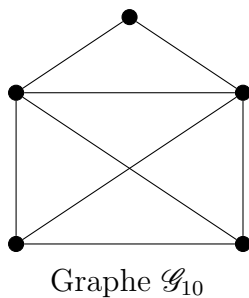
1. Il est équivalent de dire qu'à partir d'un point quelconque fixé du graphe, on peut atteindre tous les autres points ou encore qu'il existe une chaîne passant par tous les sommets du graphe.
2. La notion de connexité traduit le fait qu'un graphe est « en un seul morceau ».

**Exemple 37.** Étudier la connexité des graphes suivants.



## 4) Chaîne eulérienne

**Exemple 38.** Pour chacun des graphes suivants, est-il possible de le dessiner sans lever le stylo en passant une fois et une seule par chaque arête ?



### Définition 39

On dit qu'une chaîne est *eulérienne* si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on dit que c'est un *cycle eulérien*.

**Exemple 40.** Dans le graphe  $\mathcal{G}_8$ , la chaîne  $s_5 - s_1 - s_2 - s_3 - s_5 - s_7 - s_6 - s_4 - s_3$  est une chaîne eulérienne.

### Théorème 41. — (Euler)

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous les sommets sont de degrés pairs sauf deux au plus. Plus précisément :

1. si le graphe n'a aucun sommet de degrés impairs alors il admet non seulement une chaîne eulérienne mais même un cycle eulérien ;
2. un graphe ne peut pas avoir un seul sommet d'ordre impair (corollaire 19) ;
3. si le graphe a exactement deux sommets de degrés impairs alors il admet une chaîne eulérienne dont les extrémités sont ces deux sommets. En revanche, il n'admet pas de cycle eulérien.

### Corollaire 42

Un graphe ayant plus de deux sommets de degrés impairs n'admet pas de chaîne eulérienne.

**Exemple 43.** Répondre au problème des ponts de Koenigsberg.

**Exercice 44.** Démontrer que le graphe suivant admet un cycle eulérien et en déterminer explicitement un.

