

◆ Chapitre 4. — Suites de matrices et problèmes d'évolution

Dans tout le chapitre, k et ℓ désignent des entiers naturels non nuls. On note $\mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $k \times \ell$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I. — Suites de matrices

1) Définitions

Définition 1

Une suite de matrices (X_n) de taille $k \times \ell$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{R})$. Précisément, (X_n) désigne la fonction $n \mapsto X_n$.

Se donner une suite de matrices (X_n) de taille $k \times \ell$ revient à se donner $k \times \ell$ suites réelles qui correspondent aux suites des coefficients de (X_n) .

Remarque 2. — Dans certains cas, la suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain p et il s'agit alors d'une fonction de $\llbracket p, +\infty \rrbracket$ dans $\mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{R})$.

Exemple 3.

1. On définit une suite de matrices colonnes en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{n+1} \\ 0,5^n \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ où (u_n) et (v_n) sont les suites réelles définies par $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$ et $v_n = 0,5^n$. Les suites (u_n) et (v_n) sont les suites des coefficients de (A_n) .
2. On définit une suite de matrices carrées en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \begin{pmatrix} n^2 & 0,1^n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ où (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) sont les suites réelles définies par $a_n = n^2$, $b_n = 0,1^n$, $c_n = \frac{1}{n}$ et $d_n = 0$. Les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) sont les suites des coefficients de (B_n) .

Définition 4

On dit qu'une suite de matrices (X_n) est constante si toutes les suites des coefficients de (X_n) sont constantes.

Exemple 5.

1. La suite (C_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une suite constante.
2. La suite (D_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $D_n = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+n \end{pmatrix}$ n'est pas constante.

Définition 6

On dit qu'une suite de matrices (X_n) de $\mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{R})$ converge (ou est convergente) si toutes les suites des coefficients de (X_n) sont convergentes. La limite de (X_n) est alors la matrice $X \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les limites des suites des coefficients de (X_n) .

Si (X_n) n'est pas convergente, on dit que (X_n) diverge (ou est divergente).

Remarque 7. — Pour qu'une suite de matrices diverge, il suffit que l'une des suites de ses coefficients diverge.

Exemple 8. — Etudier la convergence des suites de matrices définies dans les exemples 3 et 5 et déterminer la limite en cas de convergence.

2) Suite géométrique de matrices et application

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$. Il faut adapter les définitions si ce n'est pas le cas. Par exemple, si elles sont définies sur $\mathbb{N}^*$, il faut remplacer « pour tout $n \in \mathbb{N}$ » par « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ».

Définition 9

1. On dit qu'une suite de matrices colonnes (C_n) de taille $k \times 1$ est géométrique s'il existe une matrice carrée constante A d'ordre k telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = AC_n$.
2. On dit qu'une suite de matrices lignes (L_n) de taille $1 \times k$ est géométrique s'il existe une matrice carrée constante A d'ordre k telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_n A$.

Dans les deux cas, on dit alors que A est la raison de la suite géométrique de matrices.

Remarque 10. — Si (X_n) est une suite géométrique de matrices, les suites de ses coefficients ne sont en général pas des suites géométriques réelles.

Propriété 11

Soit (X_n) une suite géométrique de matrices de raison A .

1. Si (X_n) est une suite de matrices colonnes alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. De façon plus générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq p$, $X_n = A^{n-p} X_p$.
2. Si (X_n) est une suite de matrices lignes alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 A^n$. De façon plus générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq p$, $X_n = X_p A^{n-p}$.

Exemple 12. — Étude d'une suite vérifiant une relation du type $X_{n+1} = AX_n + B$

On considère deux suites réelles définies par

$$u_0 = 1, v_0 = 2 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 1 \\ v_{n+1} = -\frac{5}{3}u_n + \frac{4}{3}v_n + 2 \end{cases}.$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 .
2. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 et une matrice colonne B de taille 2×1 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.
3. Déterminer une matrice colonne C telle que $C = AC + B$.
4. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice Y_n par $Y_n = X_n - C$. Démontrer que (Y_n) est une suite géométrique de matrices et en déduire l'expression de Y_n puis de X_n en fonction de X_0 , C , A et n .
5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{6}{3^n} - \frac{5}{2^n} & -\frac{3}{3^n} + \frac{3}{2^n} \\ \frac{10}{3^n} - \frac{10}{2^n} & -\frac{5}{3^n} + \frac{6}{2^n} \end{pmatrix}.$$

6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de n .
7. Étudier la convergence de la suite (X_n) .
8. En déduire le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) .

Méthode 13. — Pour étudier une suite de matrices (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = AX_n + B$, on recherche une matrice constante C telle que $C = AC + B$ puis on montre que la suite (Y_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $Y_n = X_n - C$ est une suite géométrique de matrices de raison A .

II. — Marches aléatoires

1) Un exemple

On considère le jeu suivant : initialement, on dispose un pion sur le sommet S_1 d'un carré. On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Si on obtient pile, on déplace le pion au sommet suivant dans le sens des flèches : il se retrouve donc sur S_2 . Si on obtient face, on laisse le pion dans sa position : il reste donc sur S_1 . Ensuite, on répète le processus : on relance la pièce, si on obtient pile, on déplace le pion au sommet suivant dans le sens des flèches et si on obtient face, on laisse le pion dans sa position.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement : « après le n -ième lancer, le pion se trouve sur le sommet S_1 ». On définit de même les événements B_n , C_n et D_n respectivement pour S_2 , S_3 et S_4 .

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n , b_n , c_n et d_n les probabilités respectives des événements A_n , B_n , C_n et D_n . On convient, de plus, que $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

1. Déterminer a_1 , b_1 , c_1 et d_1 puis calculer a_2 , b_2 , c_2 et d_2 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité de A_{n+1} sachant A_n , la probabilité de B_{n+1} sachant A_n , la probabilité de C_{n+1} sachant A_n et la probabilité de D_{n+1} sachant A_n .

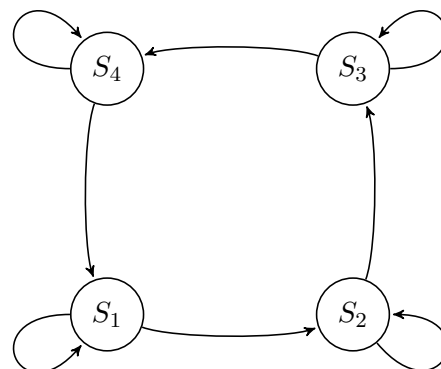
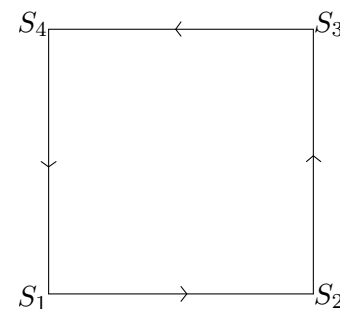
Ces probabilités s'appellent les *probabilités de transition* de l'état A_n aux états A_{n+1} , B_{n+1} , C_{n+1} et D_{n+1} . On remarque que ces probabilités ne dépendent pas de n . On les appellera aussi les probabilités de transition d'un sommet à un autre.

3. Sur le schéma ci-contre, indiquer à côté des flèches les probabilités de transition entre les différents sommets. Cette représentation s'appelle un *graphe probabiliste*.
4. On note $M = (m_{ij})$ la matrice dont le coefficient m_{ij} est la probabilité de transition du sommet S_i au sommet S_j . Déterminer M .

On dit que M est la *matrice de transition* associée au graphe précédent.

5. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n \ c_n \ d_n)$. La matrice P_n s'appelle l'*état probabiliste* après n lancers.

- a. Déterminer P_0 et justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n \times M$.
- b. En déduire l'expression de P_n en fonction n , M et P_0 .
- c. Utiliser la question précédente pour retrouver les résultats de la question 1.
- d. Déterminer la probabilité que le pion soit sur le sommet S_1 après 5 lancers puis la probabilité qu'il soit sur le sommet S_1 après 10 lancers.



2) Définitions

Définition 14

On considère un ensemble $G = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ ayant N éléments (où N est un entier supérieur ou égal à 2). Une marche aléatoire sur G est une suite de variables aléatoires (X_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. l'ensemble des valeurs prises par X_n est G .
2. pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, la probabilité conditionnelle de l'événement $(X_{n+1} = E_j)$ sachant l'événement $(X_n = E_i)$ est indépendante de n .

Les éléments $E_1, E_2, \dots, E_N$ sont appelés les états de la marche aléatoire.

Les probabilités conditionnelles de $(X_{n+1} = E_j)$ sachant $(X_n = E_i)$ sont appelées les probabilités de transition (ou de passage) entre les états E_i et E_j .

De façon imagée, une marche aléatoire est un système pouvant prendre un nombre fini d'états $E_1, E_2, \dots, E_N$ et qui évolue aléatoirement au cours du temps de telle sorte que la probabilité de passer d'un état à un autre ne dépend pas de l'instant n . Une autre façon de dire cela est que l'état futur ne dépend que de l'état présent et pas des états antérieurs. La variable aléatoire X_n désigne alors l'état du système à l'instant n (ou à l'étape n).

Dans toute la suite, on suppose que (X_n) est une marche aléatoire sur $G = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$.

Définition 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on note, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $a_i = P(X_n = E_i)$ la probabilité que le système soit dans l'état E_i à l'instant n alors la matrice ligne $P_n = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N)$ est appelée l'état probabiliste à l'instant n .

Remarque 16. — L'état P_0 désigne l'état initial du système.

Définition 17

On peut associer à une marche aléatoire sur G :

1. une représentation graphique appelée *graphe probabiliste*. Ce graphe est composé de sommets qui représentent les différents états $E_1, E_2, \dots, E_N$ et d'arêtes (ou arcs) pondérées par les probabilités de transition entre les sommets.
2. une matrice $M = (m_{ij})$ où le coefficient m_{ij} est la probabilité de transition de l'état E_i à l'état E_j . La matrice M est appelée la matrice de transition.

Remarque 18. — Par définition, les coefficients d'une matrice de transition sont des réels compris entre 0 et 1. De plus, la somme des coefficients d'une même ligne est égale à 1. On dit qu'une telle matrice est une matrice stochastique en ligne.

Théorème 19

Notons M la matrice de transition et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n l'état probabiliste à l'instant n . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n \times M$ i.e. la suite des états probabilistes est une suite géométrique de matrices lignes de raison M .

Corollaire 20

Avec les notations précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times M^n$.

Exemple 21. — On s'intéresse à une agence bancaire qui a deux types de clients : les clients d'agence et les clients internet. En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet. On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent des clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent des clients d'agence. On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année 2010 + n ,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année 2010 + n ,
- $P_n = (a_n \ i_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année 2010 + n .

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n \times M$.

On donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.
3. Déterminer la matrice de transition associée au graphe.
4. a. Calculer la matrice P_1 .
b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.

3) Comportement asymptotique

Définition 22

On suppose que l'évolution d'un système est décrite par un graphe probabiliste dont la matrice de transition est M . On appelle *état stable* du système toute matrice ligne P à coefficients positifs ou nuls, dont la somme des coefficients est égale à 1 et telle que $P = PM$.

Remarque 23. — Un tel état probabiliste est dit stable car si le système se trouve à un instant k dans l'état probabiliste $P_k = P$ alors $P_{k+1} = P_k M = PM = P$, $P_{k+2} = P_{k+1} M = PM = P$, etc... et donc, pour tout entier $n \geq k$, $P_n = P$ c'est-à-dire qu'à partir de l'instant k , les probabilités de chaque état ne changent plus.

Exemple 24.

1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable si $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.
2. Quels sont les états stables si $M = I_2$? Et si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
3. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{14}{31} & \frac{12}{31} & \frac{5}{31} \end{pmatrix}$ est un état stable si $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$. En est-il de même pour la matrice $P' = (0,7 \quad 0,6 \quad 0,25)$?

Théorème 25

On suppose que l'évolution d'un système est décrite par un graphe probabiliste dont la matrice de transition est M . S'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les coefficients de M^k sont strictement positifs alors le système admet un unique état stable P et, de plus, la suite des états probabilistes (P_n) converge vers P lorsque n tend vers $+\infty$ et ce quel que soit l'état probabiliste initial P_0 .

Remarque 26.

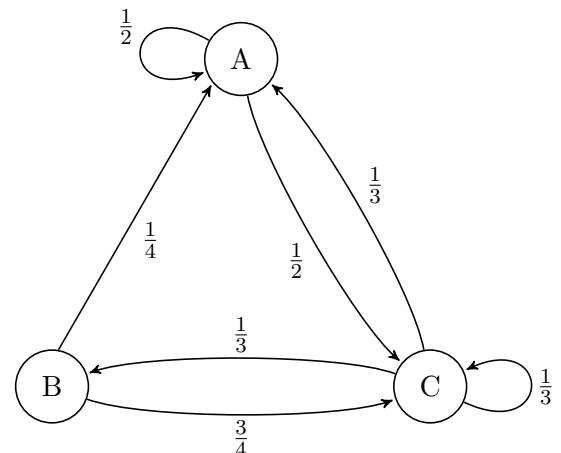
1. Il se peut que la suite (P_n) ne converge pas. Par exemple, si $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors on a $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = P_0$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1$ et ainsi de suite : si n est pair $P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, si n est impair, $P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, l'état probabiliste alterne entre deux valeurs sans jamais se rapprocher d'un état stable.
2. Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut démontrer que la suite de matrices (M^n) converge vers une matrice carrée dont toutes les lignes sont égales à la matrice ligne P .

Exemple 27. — On suppose qu'un problème est modélisé par le graphe probabiliste suivant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ l'état probabiliste à l'instant n .

On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice de transition de ce graphe probabiliste.
2. Démontrer que le système admet un unique état probabiliste stable P et que l'état probabiliste P_n converge vers P lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer P .



ANNEXE

Preuve du théorème 25 pour une marche à 2 états telle M ne contient pas de 0

On suppose ici que M ne contient pas de 0. Comme M est une matrice stochastique en ligne alors M est de la forme $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. De plus, comme M ne contient pas de 0, $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

Considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors, $\det Q = b + a \neq 0$ car $a > 0$ et $b > 0$. Ainsi, Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Après calcul, on obtient $D := Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-(a+b) \end{pmatrix}$. Posons, pour alléger les notations, $q = 1 - (a+b)$.

Dès lors, $M = QDQ^{-1}$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$. Étant donné que D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}$ et donc, après calcul,

$$M^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + aq^n & a(1 - q^n) \\ b(1 - q^n) & a + bq^n \end{pmatrix}.$$

Notons $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}$ l'état probabiliste initial. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0M^n$ donc

$$P_n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} x_0(b + aq^n) + y_0b(1 - q^n) & x_0a(1 - q^n) + y_0(a + bq^n) \end{pmatrix}.$$

Étant donné que $0 < a+b < 2$, $-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ et donc (P_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} x_0b + y_0b & x_0a + y_0a \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b(x_0 + y_0) & a(x_0 + y_0) \end{pmatrix}$$

i.e. puisque $x_0 + y_0 = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}.$$

Notons $P := \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$. Remarquons que P est bien un état probabiliste car $\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1$ et qu'il est stable pour M car

$$PM = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b(1-a) + ab}{a+b} & \frac{ba + a(1-b)}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} = P.$$

Enfin, montrons que P est unique. Supposons que M admette un autre état stable P' . Alors la suite (P'_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P'_n = P'M^n$ converge vers P d'après ce qui précède. Or, comme P' est stable par M , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P'_n = P'$. Ainsi, la suite constante égale à P' converge vers P donc $P' = P$. Ainsi, P est bien unique. ■