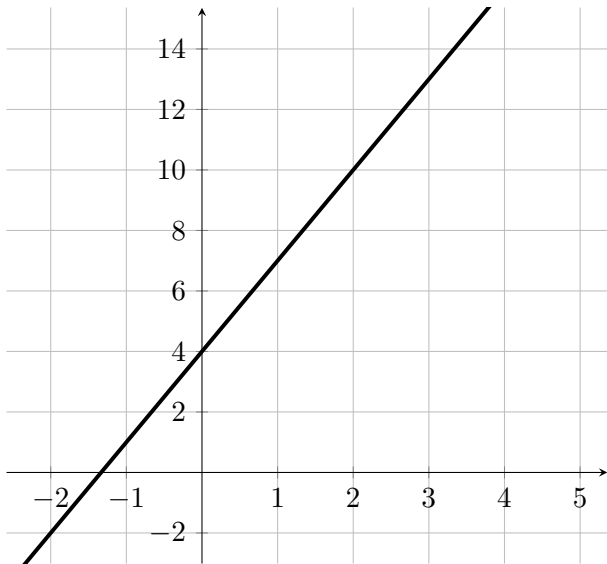


Exemple 6

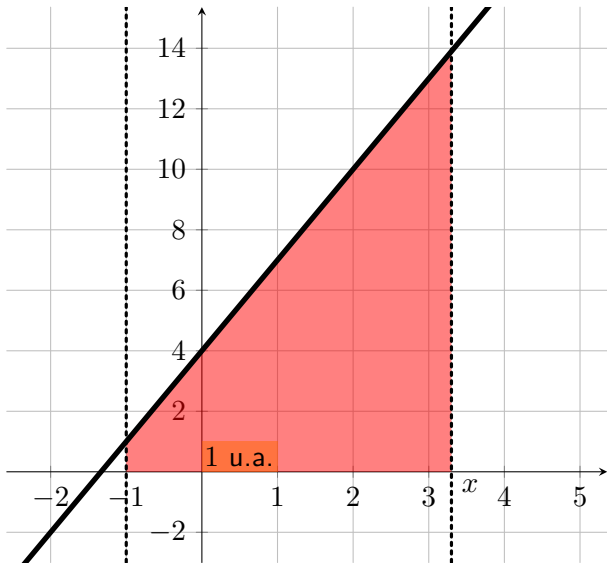
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 4$. Soit x un réel supérieur ou égal à -1 .

1. Calculer $I_x = \int_{-1}^x f(t) \, dt$.
2. On considère la fonction F qui à tout $x \geq -1$ associe $F(x) = I_x$. Calculer la dérivée de F . Que constate-t-on ?

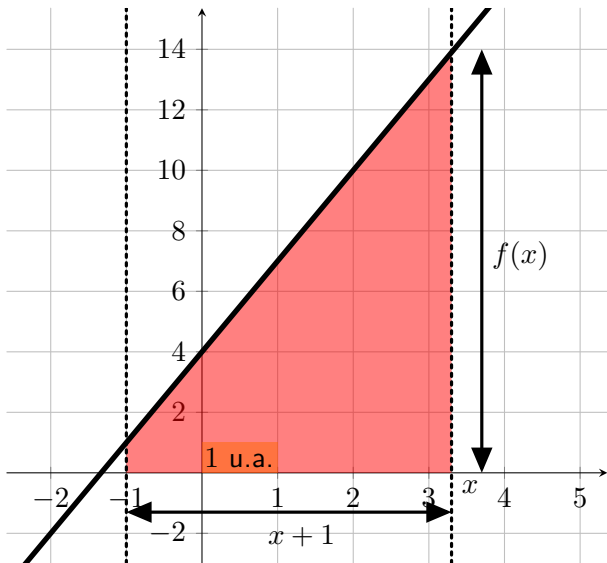
1. La fonction f est une fonction affine. Sa courbe est donc une droite.



L'aire sous la courbe entre -1 et x est l'aire d'un trapèze :



1. La petite base vaut 1, la grande base vaut $f(x)$ et la hauteur vaut $x - (-1) = x + 1$:



Ainsi,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{(1 + f(x)) \times (x + 1)}{2} = \frac{(1 + 3x + 4)(x + 1)}{2} \\ &= \frac{(3x + 5)(x + 1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 5x + 5}{2} \end{aligned}$$

donc $I_x = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{(1 + f(x)) \times (x + 1)}{2} = \frac{(1 + 3x + 4)(x + 1)}{2} \\ &= \frac{(3x + 5)(x + 1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 5x + 5}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_x = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}}$.

2. La fonction $F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et, pour tout réel x ,

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{(1 + f(x)) \times (x + 1)}{2} = \frac{(1 + 3x + 4)(x + 1)}{2} \\ &= \frac{(3x + 5)(x + 1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 5x + 5}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_x = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}}$.

2. La fonction $F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et, pour tout réel x ,

$$F'(x) = \frac{3}{2} \times 2x + 4 = 3x + 4.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{(1 + f(x)) \times (x + 1)}{2} = \frac{(1 + 3x + 4)(x + 1)}{2} \\ &= \frac{(3x + 5)(x + 1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 5x + 5}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_x = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}}$.

2. La fonction $F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et, pour tout réel x ,

$$F'(x) = \frac{3}{2} \times 2x + 4 = 3x + 4.$$

Ainsi, pour tout $x \geq -1$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 7

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors, la fonction F définie pour tout $x \in [a; b]$ par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et, de plus, pour tout $x \in [a; b]$,

$$F'(x) = f(x).$$

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

On suppose donc que f est une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

On suppose donc que f est une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Soit $x_0 \in [a; b]$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$, on considère le taux de variation de F entre x_0 et $x_0 + h$:

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

On suppose donc que f est une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Soit $x_0 \in [a; b]$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$, on considère le taux de variation de F entre x_0 et $x_0 + h$:

$$t(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

On suppose donc que f est une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Soit $x_0 \in [a; b]$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$, on considère le taux de variation de F entre x_0 et $x_0 + h$:

$$t(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Notre but est de montrer que :

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

On suppose donc que f est une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Soit $x_0 \in [a; b]$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$, on considère le taux de variation de F entre x_0 et $x_0 + h$:

$$t(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Notre but est de montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = f(x_0).$$

On va distinguer deux cas : $h > 0$ et $h < 0$.

On va distinguer deux cas : $h > 0$ et $h < 0$.

1^{er} cas : on suppose $h > 0$

On va distinguer deux cas : $h > 0$ et $h < 0$.

1^{er} cas : on suppose $h > 0$

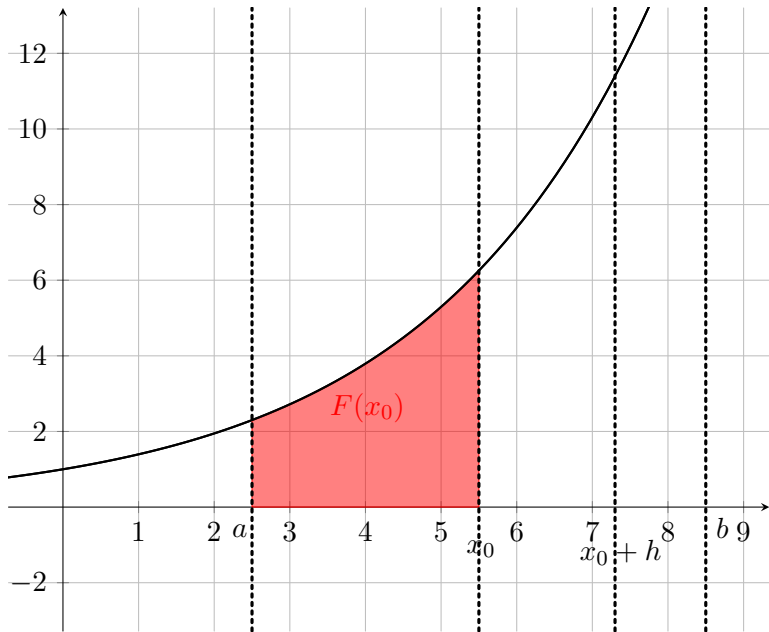
Interprétons graphiquement $F(x_0 + h)$, $F(x_0)$ et $F(x_0 + h) - F(x_0)$.

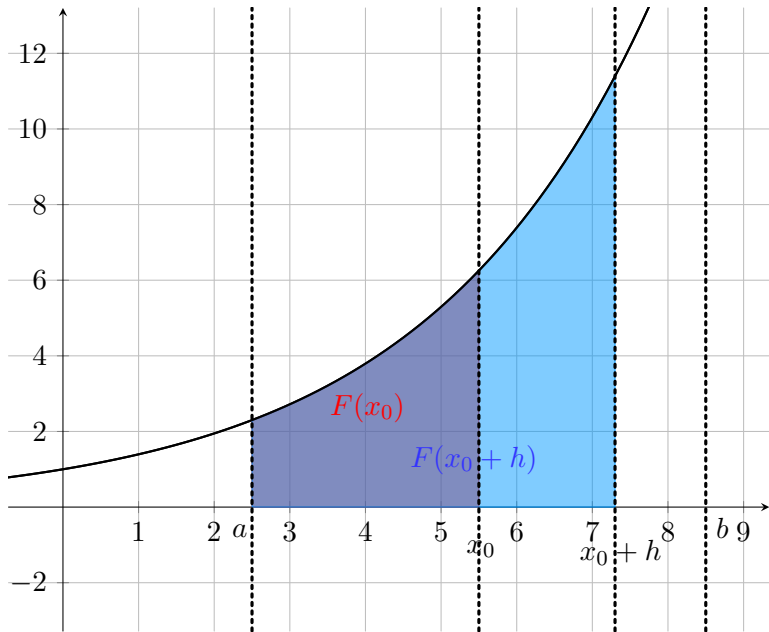
On va distinguer deux cas : $h > 0$ et $h < 0$.

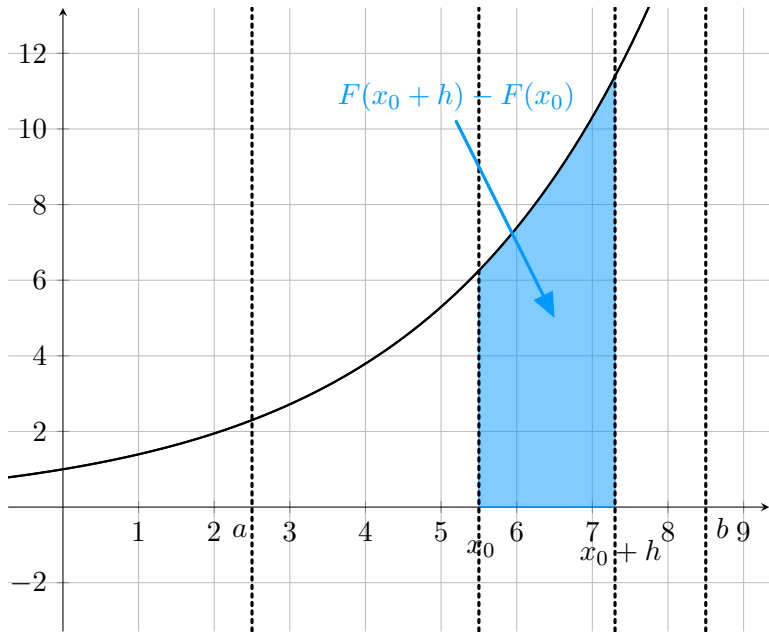
1^{er} cas : on suppose $h > 0$

Interprétons graphiquement $F(x_0 + h)$, $F(x_0)$ et $F(x_0 + h) - F(x_0)$.

On sait que $F(x_0 + h)$ est l'aire sous la courbe de f entre a et $x_0 + h$ et que $F(x_0)$ est l'aire sous la courbe de f entre a et x_0 .

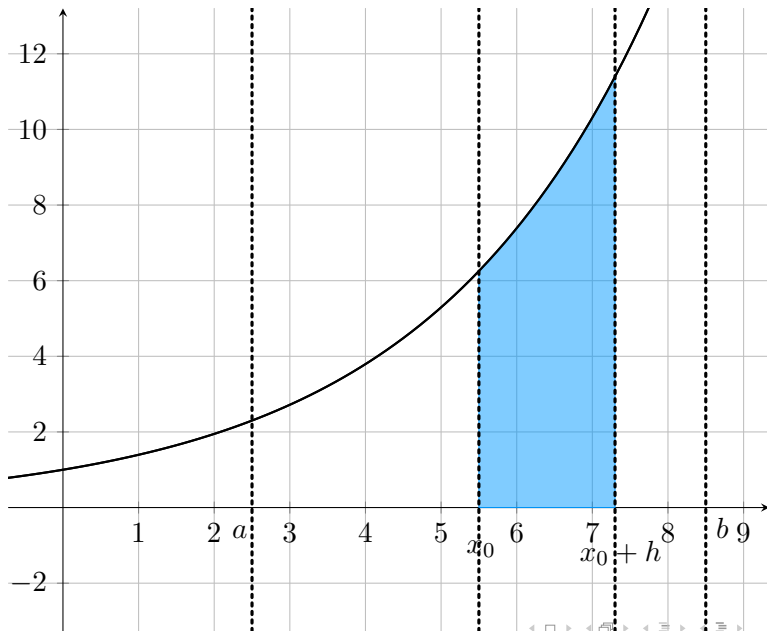




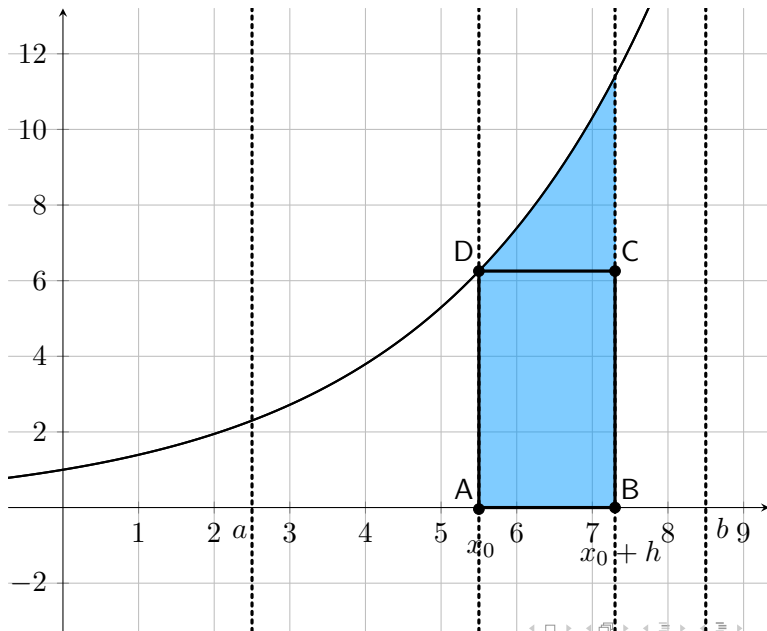


On va estimer la surface en bleu en encadrant par deux rectangles dont on sait facilement calculer les aires :

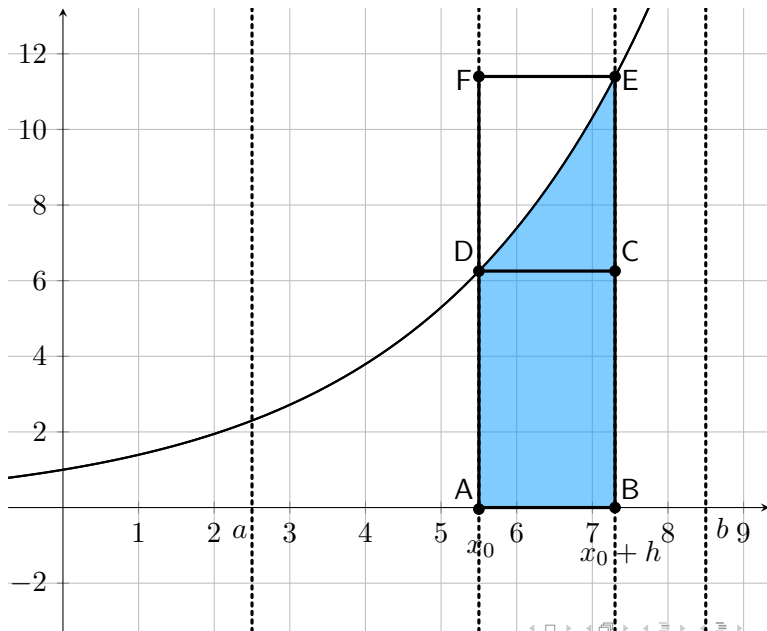
On va estimer la surface en bleu en encadrant par deux rectangles dont on sait facilement calculer les aires :



On va estimer la surface en bleu en encadrant par deux rectangles dont on sait facilement calculer les aires :



On va estimer la surface en bleu en encadrant par deux rectangles dont on sait facilement calculer les aires :



On introduit les points $A(0; x_0)$, $B(x_0 + h; 0)$, $C(x_0 + h; f(x_0))$, $D(x_0; f(x_0))$, $E(x_0 + h; f(x_0 + h))$ et $F(x_0; f(x_0 + h))$.

On introduit les points $A(0; x_0)$, $B(x_0 + h; 0)$, $C(x_0 + h; f(x_0))$, $D(x_0; f(x_0))$, $E(x_0 + h; f(x_0 + h))$ et $F(x_0; f(x_0 + h))$.

Comme $h > 0$, $x_0 < x_0 + h$ et donc, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$.

On introduit les points $A(0; x_0)$, $B(x_0 + h; 0)$, $C(x_0 + h; f(x_0))$, $D(x_0; f(x_0))$, $E(x_0 + h; f(x_0 + h))$ et $F(x_0; f(x_0 + h))$.

Comme $h > 0$, $x_0 < x_0 + h$ et donc, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$.

Ainsi, le segment $[CD]$ est entièrement situé en dessous de la courbe et le segment $[EF]$ est entièrement situé au-dessus de la courbe.

On introduit les points $A(0; x_0)$, $B(x_0 + h; 0)$, $C(x_0 + h; f(x_0))$, $D(x_0; f(x_0))$, $E(x_0 + h; f(x_0 + h))$ et $F(x_0; f(x_0 + h))$.

Comme $h > 0$, $x_0 < x_0 + h$ et donc, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$.

Ainsi, le segment $[CD]$ est entièrement situé en dessous de la courbe et le segment $[EF]$ est entièrement situé au-dessus de la courbe.

On en déduit que

$$\text{aire}(ABCD) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq \text{aire}(ABEF)$$

Autrement dit,

$$AB \times AD \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq AB \times AF$$

Autrement dit,

$$AB \times AD \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq AB \times AF$$

i.e.

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

Autrement dit,

$$AB \times AD \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq AB \times AF$$

i.e.

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

Comme $h > 0$, en divisant par h ,

Autrement dit,

$$AB \times AD \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq AB \times AF$$

i.e.

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

Comme $h > 0$, en divisant par h ,

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Autrement dit,

$$AB \times AD \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq AB \times AF$$

i.e.

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

Comme $h > 0$, en divisant par h ,

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

i.e.

$$f(x_0) \leq t(h) \leq f(x_0 + h)$$

Enfin, comme f est continue en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc, grâce au théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = f(x_0).$$

2^{ème} cas : on suppose $h < 0$

2^{ème} cas : on suppose $h < 0$

L'idée est rigoureusement la même.

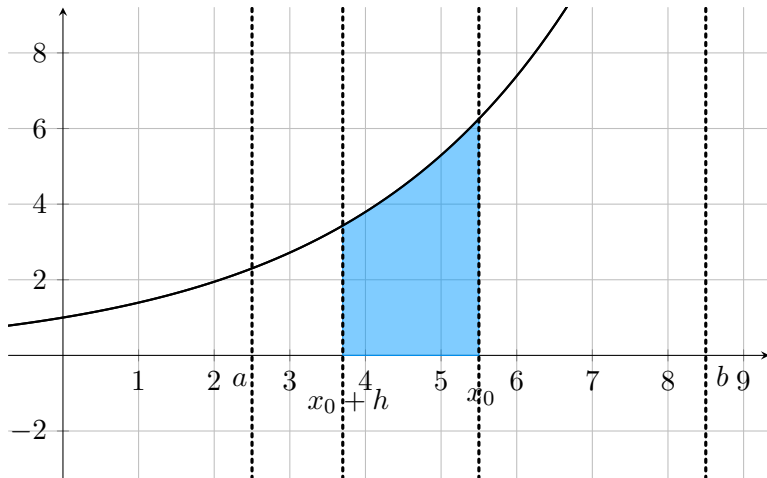
2^{ème} cas : on suppose $h < 0$

L'idée est rigoureusement la même.

La seule chose qui change est le fait que $x_0 + h < x_0$ et donc $f(x_0 + h) < f(x_0)$.

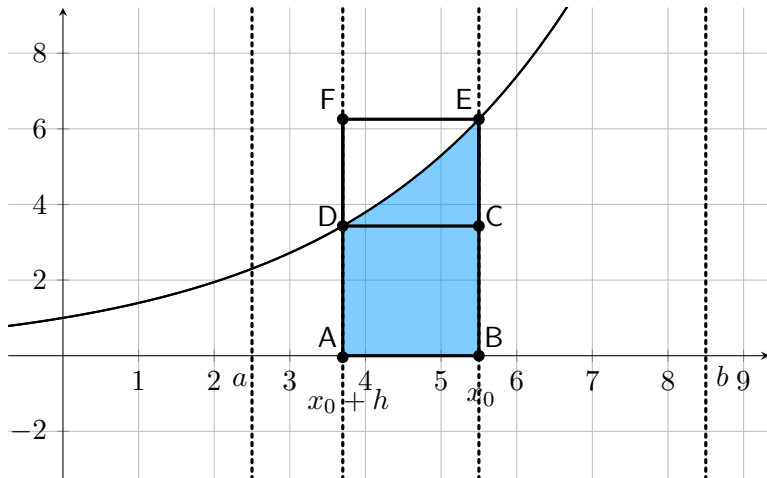
Dans ce cas, $F(x_0) - F(x_0 + h)$ correspondant à l'aire en bleu :

Dans ce cas, $F(x_0) - F(x_0 + h)$ correspondant à l'aire en bleu :



On encadre comme précédemment par deux rectangles ABCD et ABEF :

On encadre comme précédemment par deux rectangles ABCD et ABEF :



On en déduit que

On en déduit que

$$\text{aire}(\text{ABCD}) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq \text{aire}(\text{ABEF})$$

On en déduit que

$$\text{aire}(\text{ABCD}) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq \text{aire}(\text{ABEF})$$

Or, comme $h < 0$, $AB = -h$,

$$(-h) \times f(x_0 + h) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq (-h) \times f(x_0)$$

En divisant par $-h > 0$ (car $h < 0$), on obtient

On en déduit que

$$\text{aire}(\text{ABCD}) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq \text{aire}(\text{ABEF})$$

Or, comme $h < 0$, $AB = -h$,

$$(-h) \times f(x_0 + h) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq (-h) \times f(x_0)$$

En divisant par $-h > 0$ (car $h < 0$), on obtient

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$$

On en déduit que

$$\text{aire}(\text{ABCD}) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq \text{aire}(\text{ABEF})$$

Or, comme $h < 0$, $\text{AB} = -h$,

$$(-h) \times f(x_0 + h) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq (-h) \times f(x_0)$$

En divisant par $-h > 0$ (car $h < 0$), on obtient

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$$

i.e.

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

On aboutit donc à

$$f(x_0 + h) \leq t(h) \leq f(x_0)$$

et on conclut comme dans le premier cas que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = f(x_0).$$

Conclusion

Conclusion

On a montré que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = f(x_0)$$

Conclusion

On a montré que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = f(x_0)$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = f(x_0)$$

comme annoncé.

Conclusion

On a montré que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = f(x_0)$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = f(x_0)$$

comme annoncé.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Remarque 8

On constate donc que le problème de calculer l'intégrale d'une fonction f positive et continue sur un intervalle $[a; b]$ revient à chercher une fonction F telle que $F' = f$. Ceci justifie l'introduction de la notation de primitive.

Merci de m'avoir écouté !

Merci de m'avoir écouté !

Des questions ?