

1. a. Comme ABCDEFGH est un cube,  $(AE) \parallel (CG)$  et  $AE = CG$ . De plus, comme I et L sont les milieux respectifs de  $[AE]$  et  $[CG]$ ,  $(AI) \parallel (CL)$  et  $AI = CL$ . Le quadrilatère ACLI a deux côtés parallèles et de même longueur donc  $ACLI$  est un parallélogramme.  
 b. On déduit de la question précédente que  $(AC) \parallel (IL)$ . De plus, dans le triangle ABC, le théorème de la droite des milieux assure que  $(AC) \parallel (JK)$ . Il s'ensuit que  $(IL) \parallel (JK)$ .  
 c. La question précédente assure que les droites  $(IL)$  et  $(JK)$  sont coplanaires donc il en est de même des droites  $(IJ)$  et  $(KL)$ . Ainsi, ces deux droites sont soit sécantes soit parallèles. Or, si elles étaient parallèles,  $(IJ)$  et  $(AE)$  seraient de droites sécantes du plan  $(ABE)$  parallèles respectivement à  $(KL)$  et  $(GC)$  qui sont deux droites sécantes du plan  $(BCG)$  donc, par théorème, ces deux plans seraient parallèles ce qui n'est pas le cas. Ainsi,  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont sécantes en un point M.  
 d. D'une part,  $M \in (IJ) \subset (ABF)$  et, d'autre part,  $M \in (KL) \subset (CBF)$  donc M appartient à l'intersection des deux plans  $(ABF)$  et  $(CBF)$ . Par définition, cette intersection est la droite  $(BF)$  donc  $M \in (BF)$ .  
 2. Le point H appartient à  $(ACH)$  mais pas  $(BEG)$  donc les plans  $(ACH)$  et  $(BEG)$  ne sont pas confondus. Les segments  $[EH]$  et  $[BC]$  sont parallèles et de même longueur donc EBCH est un parallélogramme. Par suite,  $(CH)$  est parallèle à  $(EB)$ . De la même façon,  $(AC)$  est parallèle à  $(EG)$ . Ainsi, deux droites sécantes du plan  $(ACH)$  sont parallèles à deux droites sécantes du plan  $(BEG)$  donc, par théorème, les plans  $(ACH)$  et  $(BEG)$  sont strictement parallèles.  
 3. Etant donné que G n'appartient pas au plan  $(ABC)$ , l'intersection de  $(GN)$  et  $(ABC)$  est soit vide soit un point. Comme les droites  $(AB)$  et  $(GH)$  sont parallèles, les points A, B, G et H sont coplanaires. De plus, N est le milieu de  $[AH]$  donc A, B, G et N sont coplanaires. Ainsi, les droites  $(AB)$  et  $(GN)$  sont coplanaires donc elles sont soit parallèles soit sécantes. Or, la parallèle à  $(AB)$  passant par G est  $(GH)$  et  $N \in (GH)$  donc  $(AB)$  et  $(GH)$  ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point S. Ainsi, l'intersection de  $(GN)$  et  $(ABC)$  est le point S.  
 4. Etant donné que R n'appartient pas  $(ABC)$ , l'intersection de  $(GL)$  et  $(ABC)$  est soit vide soit un point. On a montré précédemment que  $(EG)$  et  $(AC)$  sont parallèles donc ces droites sont coplanaires. Comme R est le milieu de  $[EG]$ , A, C, G et R sont donc coplanaires et, enfin, comme L est le milieu de  $[CG]$ , A, C, L et R sont coplanaires. Ainsi, les droites  $(RL)$  et  $(AC)$  sont sécantes en un point T. Ainsi, l'intersection de  $(RL)$  et  $(ABC)$  est le point T.

