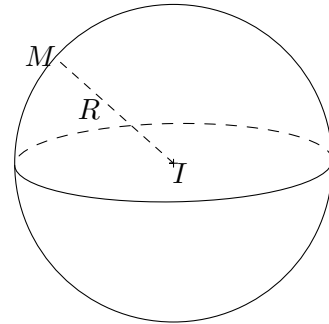


2) Équation de sphères

Définition 30

Soit I un point de l'espace et R un réel strictement positif. On appelle sphère de centre I et de rayon R l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = R$.



Propriété 31

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si I est le point de coordonnées $(x_I; y_I; z_I)$ et si R est un réel strictement positif alors un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de rayon R si et seulement si $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$.

Une telle équation est appelée équation cartésienne (réduite) de $\mathcal{S}$.

Démonstration. Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $IM = R$ ce qui équivaut à $IM^2 = R^2$ (car $IM \geq 0$ et $R \geq 0$). Or, comme le repère est orthonormé,

$$IM^2 = (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2$$

donc $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$. $\square$

Exemple 32. On considère les points $A(-1; 3; 4)$ et $B(2; -6; 0)$ de l'espace. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$.

Notons I le milieu de $[AB]$. Alors, $I\left(\frac{-1+2}{2}; \frac{3+(-6)}{2}; \frac{4+0}{2}\right)$ i.e. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 2\right)$ donc

$$IA^2 = \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + (4 - 2)^2 = \frac{9}{4} + \frac{81}{4} + 4 = \frac{53}{4}$$

donc l'équation réduite de $\mathcal{S}$ est $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \frac{53}{4}$.

Application 33. — Soit A et B deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux. Notons I le milieu de $[AB]$. Alors,

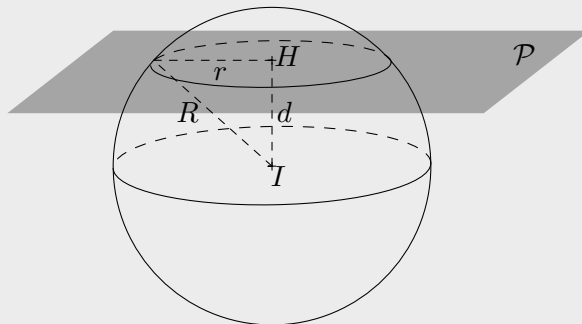
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{=\vec{0}} - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow IM = IA \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est la sphère de centre I et de rayon IA , autrement la sphère de diamètre $[AB]$.

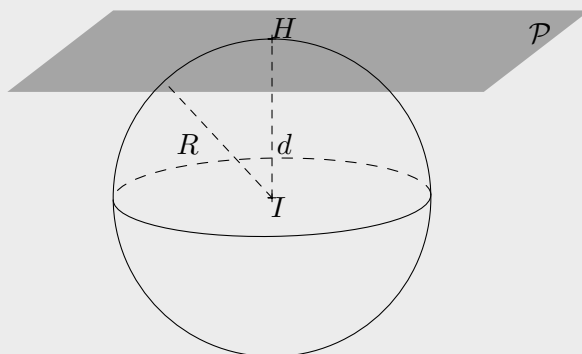
Propriété 34. — (admise)

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\mathcal{S}$ une sphère de centre I et de rayon R . On note H le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{P}$ et $d = IH$ la distance de I au plan $\mathcal{P}$. Alors, l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ est :

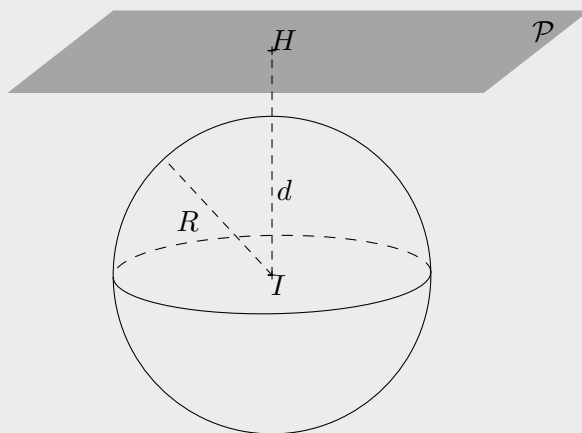
- un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ si $d < R$;



- le point H si $d = R$;



- vide si $d > R$.



Exemple 35. — Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $I(1; -2; 0)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$. Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de rayon 3.

Notons H le projeté orthogonal de I sur le plan $\mathcal{P}$. Par définition, $\overrightarrow{IH}$ est normal à $\mathcal{P}$ donc colinéaire à $\vec{n}(1; 1; -3)$. Ainsi, une représentation paramétrique de (IH) est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -3t \end{cases}$$

Or, le point H est le point d'intersection de (IH) et de $\mathcal{P}$. Pour trouver ses coordonnées, on

résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \\ x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \\ (1 + t) + (-2 + t) - 3(-3t) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \\ 11t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{11} \\ y = -\frac{25}{11} \\ z = \frac{9}{11} \\ t = -\frac{3}{11} \end{cases}$$

Ainsi, $H\left(\frac{8}{11}; -\frac{25}{11}; \frac{9}{11}\right)$. Dès lors,

$$IH = \sqrt{\left(1 - \frac{8}{11}\right)^2 + \left(-2 + \frac{25}{11}\right)^2 + \left(0 - \frac{9}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{11}}$$

Ainsi, $IH < 3$ donc l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{3^2 - \frac{9}{11}} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$ inclus dans le cercle $\mathcal{P}$.