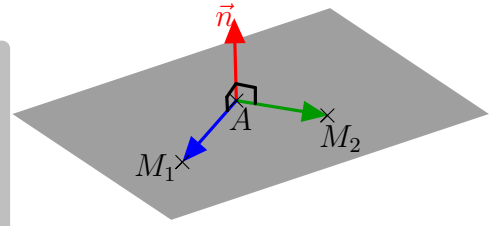


III. — Équations cartésiennes de plans et de sphères de l'espace

1) Équation cartésienne d'un plan

Propriété 25

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. Alors, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est l'unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Démonstration. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Pour montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, on montre que $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

Pour cela, considérons une base $(\vec{u}; \vec{v})$ de $\mathcal{P}$. Alors, comme $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont non coplanaires.

Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors, il existe des réels a , b et c tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}$. Alors,

$$0 = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}) \cdot \vec{n} = a(\vec{u} \cdot \vec{n}) + b(\vec{v} \cdot \vec{n}) + c\vec{n} \cdot \vec{n} = c\|\vec{n}\|^2$$

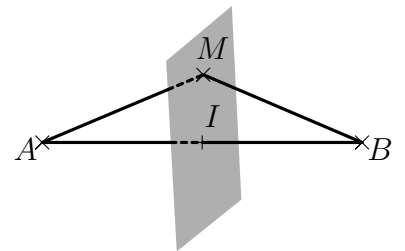
donc, comme $\|\vec{n}\| \neq 0$, $c = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ donc M appartient au plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui n'est autre que le plan $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{P}$. Alors, $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$ donc il est orthogonal à $\vec{n}$. Ainsi, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ i.e. $M \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

On conclut donc que $\mathcal{E} = \mathcal{P}$. □

Propriété 26

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Alors, l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B (i.e. tels que $AM = BM$) est un plan appelé plan médiateur de $[AB]$.



Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B . Alors,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BM}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0 \end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ et, en notant I le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IM}$ donc

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{IM}) = 0 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

On déduit alors de la propriété 25 que $\mathcal{P}$ est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. □



Attention à l'erreur fréquente qui consiste à croire de l'ensemble des points équidistants de A et B est une droite. C'est vrai dans le plan (et cette droite est la médiatrice de $[AB]$) mais pas dans l'espace.

Propriété 27

On munit l'espace d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace ayant pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
2. Réciproquement, étant donné des réels a, b, c et d avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

Démonstration.

1. Considérons un point $A(x_A; y_A; z_A)$ du plan $\mathcal{P}$. Alors,

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - z_A) \times c = 0 \\ &\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, on conclut que $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$ donc $\mathcal{P}$ a bien une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

2. Soit a, b, c et d des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan tels que $ax + by + cz + d = 0$. Alors, $\mathcal{E} \neq \emptyset$. En effet, si $a \neq 0$ alors $A(-\frac{d}{a}; 0; 0) \in \mathcal{E}$, si $b \neq 0$ alors $A(0; -\frac{d}{b}; 0) \in \mathcal{E}$ et si $c \neq 0$ alors $A(0; 0; -\frac{d}{c}) \in \mathcal{E}$. Considérons donc un point A appartenant à $\mathcal{E}$. Alors, par définition, $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ donc $d = -ax_A - by_A - cz_A$. Notons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a; b; c)$. Par le calcul fait dans le point 1.,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A)$$

donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + cz + d$. Ainsi,

$$M(x; y; z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

et donc, par la propriété 25, $\mathcal{E}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$. □

Remarque 28. — Une équation cartésienne d'un plan n'est pas unique. Par exemple, si $x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ alors $2x - 4y + 2z + 6 = 0$ ou $-x + 2y - z - 3 = 0$ sont également des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$. En revanche, on peut affirmer que deux équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnelles (essentiellement car deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires...)

Exemple 29. — On considère les points $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$ et $C(4; 1; -1)$. Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne de (ABC) .

On a $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(4; 0; -2)$ donc $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = 0 \neq -4 = y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un unique plan (ABC) dont $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base.

Pour déterminer une équation cartésienne de (ABC) , cherchons un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ à ce plan. Un tel vecteur est caractérisé par $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$. Or,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1) \times a + (-1) \times b + 0 \times c = 0 \\ 4 \times a + 0 \times b + (-2) \times c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b = 0 \\ 4a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2a \end{cases} \end{aligned}$$

Ici, il y a un choix à faire (ce qui est normal puisqu'il existe une infinité de vecteurs normaux). Prenons par exemple $a = 1$ et alors $b = -1$ et $c = 2$. On obtient ainsi le vecteur normal $\vec{n}(1; -1; 2)$. (On aurait pu prendre n'importe quelle valeur pour a sauf 0 car un vecteur normal est non nul).

Maintenant qu'on dispose d'un vecteur normal à (ABC) , on peut déterminer une équation cartésienne de ce plan de deux façons.

1^{ère} méthode. On reprend l'idée de la démonstration de la propriété 27.

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 0) \times 1 + (y - 1) \times (-1) + (z - 1) \times 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y + 1 + 2z - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation de (ABC) est $x - y + 2z - 1 = 0$.

2^{de} méthode. Par la propriété 27, on sait que (ABC) a une équation cartésienne de la forme $x - y + 2z + d = 0$. Reste à déterminer d et, pour cela, on utilise un des points du plan, par exemple A. Ainsi, $x_A - y_A + 2z_A + d = 0$ donc $d = -x_A + y_A - 2z_A = -0 + 1 - 2 \times 1 = -1$. Une équation cartésienne de (ABC) est donc $x - y + 2z - 1 = 0$.



Dans l'espace, $y = 2x + 1$ est l'équation cartésienne d'un plan car cette équation équivaut à $2x - y + 0z + 1 = 0$ qui est bien de la forme précédente avec $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$ et $d = 1$.