

Intégration par parties

Propriété 1. — Formule d'intégration par parties

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit u et v deux fonctions définies et dérivables $[a; b]$. On suppose, de plus, que les fonctions u' et v' sont continues sur $[a; b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x) \, dx$$

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x) \, dx$$

et, par linéarité de l'intégrale,

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x) \, dx$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x) \, dx$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Or, par définition, uv est une primitive de $(uv)'$ donc

Démonstration.

Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x) \, dx$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Or, par définition, uv est une primitive de $(uv)'$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$



La formule d'intégration par parties est intéressante si :

1. on ne sait pas trouver directement une primitive de uv' sur $[a; b]$;
2. on doit intégrer un produit de la forme uv' i.e. le produit d'une fonction u et de la dérivée d'une fonction connue v ;
3. La dérivée de u est « plus simple » que u et/ou on sait déterminer une primitive de $u'v$ sur $[a; b]$.

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x \, dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x \, dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x \, dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$I = \int_0^1 x e^x dx$$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$I = \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1$$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$I = \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx$$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \\ &= e - 0 - \int_0^1 e^x dx \end{aligned}$$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \\ &= e - 0 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) \end{aligned}$$

Exemple 2

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \\ &= e - 0 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I = 1}$.

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt$$

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt$$

On considère alors les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto 1$

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt$$

On considère alors les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto t$.

Exemple 3

Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt$$

On considère alors les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont bien dérivables et leurs dérivées continues sur $[1; x]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties :

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt$$

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt = [\ln(t) \times t]_1^x$$

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt \\
 &= \ln(x) \times x - \ln(1) \times 1 - \int_1^x 1 \, dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt \\
 &= \ln(x) \times x - \ln(1) \times 1 - \int_1^x 1 \, dt \\
 &= x \ln(x) - 1 \times (x - 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt \\
 &= \ln(x) \times x - \ln(1) \times 1 - \int_1^x 1 \, dt \\
 &= x \ln(x) - 1 \times (x - 1).
 \end{aligned}$$

On conclut que la primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto x \ln(x) - x + 1.$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt \\
 &= \ln(x) \times x - \ln(1) \times 1 - \int_1^x 1 \, dt \\
 &= x \ln(x) - 1 \times (x - 1).
 \end{aligned}$$

On conclut que la primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto x \ln(x) - x + 1.$$

Remarque. Une autre primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ est la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$.

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^\pi \sin(x)e^x \, dx$.

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^\pi \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$.

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$$

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx = [\sin(x)e^x]_0^{\pi}$$

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx = [\sin(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx$$

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx = [\sin(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \\ &= - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \end{aligned}$$

car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx = [\sin(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \\ &= - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \end{aligned}$$

car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

Procédons à une seconde intégration par parties pour cette nouvelle intégrale en considérant $u : x \mapsto \cos(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx = [\sin(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \\ &= - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \end{aligned}$$

car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

Procédons à une seconde intégration par parties pour cette nouvelle intégrale en considérant $u : x \mapsto \cos(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto -\sin(x)$ et $v : x \mapsto e^x$.

Exemple 4

Calculer $J = \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx = [\sin(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \\ &= - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx \end{aligned}$$

car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

Procédons à une seconde intégration par parties pour cette nouvelle intégrale en considérant $u : x \mapsto \cos(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto -\sin(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Ainsi, u et v sont des fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; \pi]$ donc

$$\int_0^\pi \cos(x)e^x \, dx = [\cos(x)e^x]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \cos(x)e^x \, dx = [\cos(x)e^x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin(x)e^x \, dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(x)e^x \, dx &= [\cos(x)e^x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin(x)e^x \, dx \\ &= \cos(\pi)e^\pi - \cos(0)e^0 + \int_0^\pi \sin(x)e^x \, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos(x)e^x \, dx &= [\cos(x)e^x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin(x)e^x \, dx \\
 &= \cos(\pi)e^\pi - \cos(0)e^0 + \int_0^\pi \sin(x)e^x \, dx \\
 &= -e^\pi - 1 + J
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos(x)e^x \, dx &= [\cos(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin(x)e^x \, dx \\
 &= \cos(\pi)e^{\pi} - \cos(0)e^0 + \int_0^{\pi} \sin(x)e^x \, dx \\
 &= -e^{\pi} - 1 + J
 \end{aligned}$$

On a donc $J = -(-e^{\pi} - 1 + J) = e^{\pi} + 1 - J$ i.e. $2J = e^{\pi} + 1$ et

ainsi $J = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$.

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \, dt$.

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto t$.

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0; e-1]$ donc

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0; e-1]$ donc

$$K = [\ln(1+t) \times t]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times t dt$$

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0; e-1]$ donc

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times t]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times t dt \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1) - \ln(1) \times 0 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt \end{aligned}$$

Exemple 5

Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0; e-1]$ donc

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times t]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times t dt \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1) - \ln(1) \times 0 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt \end{aligned}$$

i.e.

$$K = e-1 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt.$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$L = \int_0^{e-1} \frac{t + 1 - 1}{1+t} dt$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{e-1} \frac{t + 1 - 1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \end{aligned}$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{e-1} \frac{t + 1 - 1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{1+t} dt \end{aligned}$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{e-1} \frac{t + 1 - 1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{1+t} dt \\ &= [t - \ln(1+t)]_0^{e-1} \end{aligned}$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{e-1} \frac{t + 1 - 1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{1+t} dt \\ &= [t - \ln(1+t)]_0^{e-1} \end{aligned}$$

donc

$$L = e - 1 - \ln(1 + e - 1) - (0 - \ln(1)) = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{e-1} \frac{t + 1 - 1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{1+t} dt \\ &= [t - \ln(1+t)]_0^{e-1} \end{aligned}$$

donc

$$L = e - 1 - \ln(1 + e - 1) - (0 - \ln(1)) = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Finalement, on conclut que $K = e - 1 - (e - 2)$ i.e. $\boxed{K = 1}$.

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$.

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$.

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

$$K = [\ln(1+t) \times (t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times (t+1) dt$$

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times (t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times (t+1) dt \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1+1) - \ln(1) \times (0+1) - \int_0^{e-1} 1 dt \end{aligned}$$

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times (t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times (t+1) dt \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1+1) - \ln(1) \times (0+1) - \int_0^{e-1} 1 dt \\ &= e-1 \times (e-1) \end{aligned}$$

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times (t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times (t+1) dt \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1+1) - \ln(1) \times (0+1) - \int_0^{e-1} 1 dt \\ &= e-1 \times (e-1) \end{aligned}$$

et on obtient directement $\boxed{K = 1}$.