

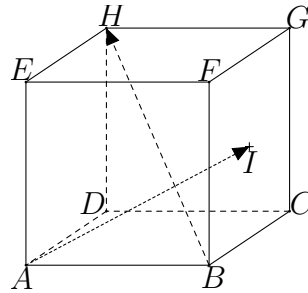
II. — Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de vecteurs et de droites

Définition 10

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple 11. — On considère un cube $ABCDEFGH$ et on note I le centre du carré $BCGF$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.



1^{ère} méthode (sans coordonnées)

On va montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ selon les vecteurs portés par les arêtes du cube, par exemple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

et

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \right) \\ &= -AB^2 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}AD^2 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}AE^2 \\ &= -AB^2 + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AB^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.

2^{ème} méthode (avec coordonnées)

On prend comme unité le côté du cube et on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Alors, $\overrightarrow{AI} \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ et $\overrightarrow{BH} (-1; 1; 1)$ donc

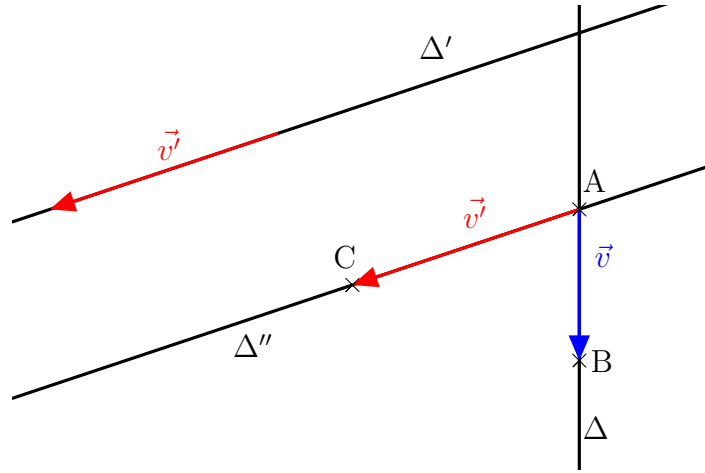
$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = 1 \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = -1 + 1 = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.

Propriété 12

Soit Δ et Δ' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$. Alors, Δ et Δ' sont orthogonales si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux.

Démonstration. Considérons un point A sur Δ et le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Notons, de plus, Δ'' la parallèle à Δ' passant par A et C le point de Δ'' tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}'$.



Alors, par définition, Δ est orthogonale à Δ' si et seulement si Δ est perpendiculaire à Δ'' ce qui équivaut à dire que $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Or, $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ donc, comme $AB \neq 0$ et $AC \neq 0$, $\vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$ si et seulement si $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ ce qui équivaut à $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Ainsi, Δ et Δ' sont orthogonales si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux. $\square$

Propriété 13

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration. Clairement, si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan alors elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Réciproquement, soit un plan $\mathcal{P}$, Δ et Δ' deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace orthogonale à Δ et à Δ' . Notons $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ et Δ' et $\vec{n}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Comme Δ et Δ' sont sécantes, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont non colinéaires et ils forment donc une base du plan $\mathcal{P}$. Soit Δ'' une droite du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{v}''$ un vecteur directeur de Δ'' . Alors, il existe des réels a et b tels que $\vec{v}'' = a\vec{v} + b\vec{v}'$ donc

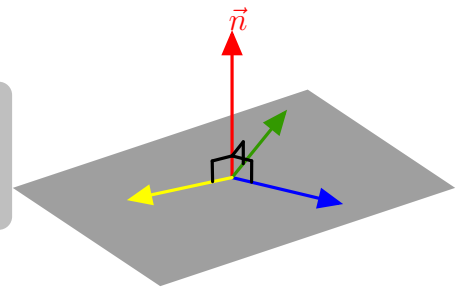
$$\vec{v}'' \cdot \vec{n} = (a\vec{v} + b\vec{v}') \cdot \vec{n} = a(\vec{v} \cdot \vec{n}) + b(\vec{v}' \cdot \vec{n}) = 0$$

car $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{v}'$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est orthogonale à Δ'' . $\square$

2) Vecteur normal à un plan

Définition 14

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.



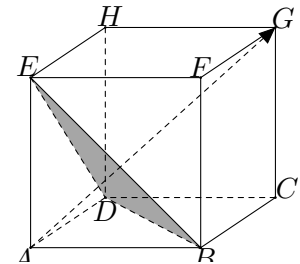
Remarque 15. — Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ revient à dire que $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Propriété 16

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Démonstration. C'est exactement ce qu'on a démontré dans la propriété 13. $\square$

Exemple 17. — On considère un cube $ABCDEFGH$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) .



On prend le côté du cube comme unité et on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Alors, $\overrightarrow{AG} (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{BD} (-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{DE} (0; -1; 1)$ donc

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 = 0$$

et

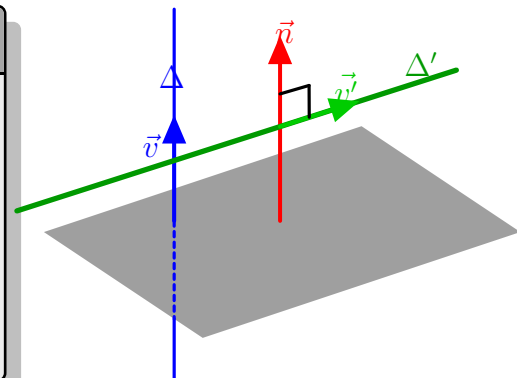
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DE} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) donc $\overrightarrow{AG}$ est normal (BDE) .

Propriété 18

Soit $\mathcal{P}$ un plan et Δ une droite de l'espace. On suppose que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ . Alors,

1. Δ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{n}$;
2. Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$.



Démonstration.

1. La droite Δ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe une droite Δ' incluse dans $\mathcal{P}$ et parallèle à Δ . Ceci équivaut à dire que $\vec{v}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$ ce qui équivaut à dire que $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

2. Considérons deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ orthogonaux de $\mathcal{P}$. Alors, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathcal{P}$.

Si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$ alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{n}$ donc, comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, $\vec{v} \cdot \vec{u} = (k\vec{n}) \cdot \vec{u} = k(\vec{n} \cdot \vec{u}) = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}' = (k\vec{n}) \cdot \vec{u}' = k(\vec{n} \cdot \vec{u}') = 0$. Ainsi, $\vec{v}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ donc $\vec{v}$ est normal à $\mathcal{P}$ et ainsi Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Réciproquement, supposons Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$. Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{n}$ sont non coplanaires, il existe des réels a , b et c tels que $\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{n}$. Comme $\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ et comme $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, on en déduit que

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{u} = (a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{n}) \cdot \vec{u} = a(\vec{u} \cdot \vec{u}) + b(\vec{u}' \cdot \vec{u}) + c(\vec{n} \cdot \vec{u}) = a \|\vec{u}\|^2$$

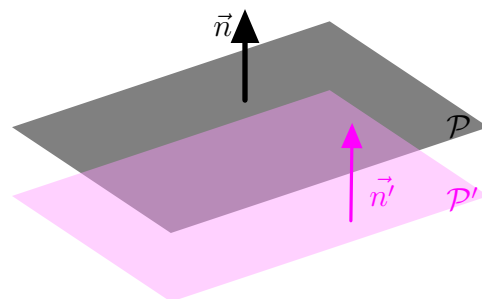
et

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{u}' = (a\vec{u} + b\vec{u}' + c\vec{n}) \cdot \vec{u}' = a(\vec{u} \cdot \vec{u}') + b(\vec{u}' \cdot \vec{u}') + c(\vec{n} \cdot \vec{u}') = b \|\vec{u}'\|^2.$$

Comme $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{u}'\| \neq 0$, on en déduit que $a = b = 0$ donc $\vec{v} = c\vec{n}$ et ainsi $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires à $\vec{n}$. □

Propriété 19

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Alors, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.



Démonstration. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ une base de $\mathcal{P}'$.

Supposons que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires. Alors, il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{n} = k\vec{n}'$. Les vecteurs $\vec{n}'$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont non coplanaires donc il existe des réels a , b et c tels que $\vec{u} = a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{n}'$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{u} \cdot \vec{n} = (a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{n}') \cdot (k\vec{n}') = (a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{n}') \cdot (k\vec{n}') \\ &= (ak)(\vec{u}' \cdot \vec{n}') + (bk)(\vec{v}' \cdot \vec{n}') + (ck)(\vec{n}' \cdot \vec{n}') \\ &= c \times k \times \|\vec{n}'\|^2 \end{aligned}$$

Comme $k \times \|\vec{n}'\|^2 \neq 0$, on conclut que $c = 0$ donc $\vec{u} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$.

On montre de même qu'il existe des réels c et d tels que $\vec{v} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$. Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires avec $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ donc $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$. Considérons une droite Δ de vecteur directeur $\vec{n}$. Alors, comme $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$, il existe des réels a , b et c et d tels que $\vec{u} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ et $\vec{v} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$. Comme $\vec{n}'$ est normal à $\mathcal{P}'$, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{n}' = (a\vec{u}' + b\vec{v}') \cdot \vec{n}' = a(\vec{u}' \cdot \vec{n}') + b(\vec{v}' \cdot \vec{n}') = 0$$

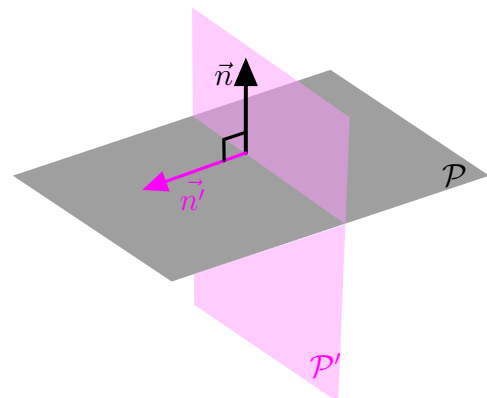
et

$$\vec{v} \cdot \vec{n}' = (c\vec{u}' + d\vec{v}') \cdot \vec{n}' = c(\vec{u}' \cdot \vec{n}') + d(\vec{v}' \cdot \vec{n}') = 0$$

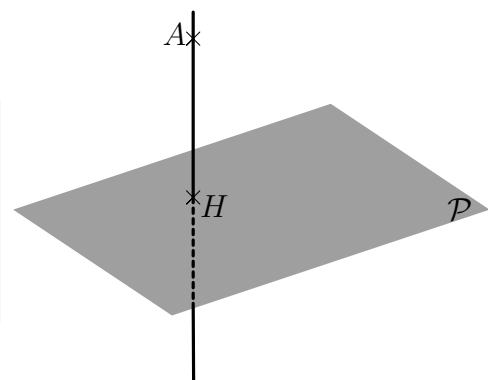
donc $\vec{n}'$ est normal à $\mathcal{P}$. Comme Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$, on déduit de la propriété précédente que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires. □

Définition 20

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$.

**Propriété 21**

Soit A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il existe une droite et une seule passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. Cette droite coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point H appelé le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.



Démonstration. Soit Δ une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ la parallèle à Δ passant par A . Alors, Δ est bien une droite passant par A et orthogonal à $\mathcal{P}$.

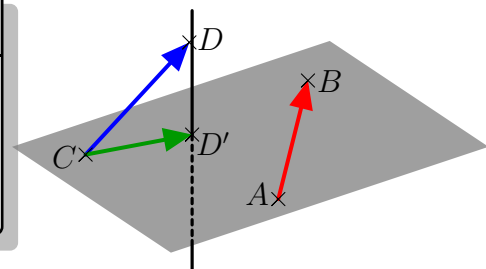
De plus, si $\mathcal{D}'$ est une autre droite passant par A est orthogonal à $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (car leurs vecteurs directeurs sont colinéaires) et passent toutes les deux par A donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. $\square$

Remarque 22. — Si $A \in \mathcal{P}$ alors $H = A$ i.e. A est son propre projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.

Propriété 23

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace. On note D' le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) . Alors,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD'}.$$



Démonstration. Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD'}$$

car $\overrightarrow{DD'}$ est normal au plan (ABC) donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. $\square$

Remarque 24. — L'intérêt de la proposition précédente réside dans le fait que D' appartient au plan (ABC) donc les points A, B, C et D' sont coplanaires.