

Produit scalaire dans l'espace

I. – Définition

I. – Définition

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

I. – Définition

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$



Par définition, le produit scalaire de deux **vecteurs** est un **nombre réel** (positif, négatif ou nul).

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si A , B et C sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan $\mathcal{P}$ de l'espace contenant les points A , B et C (et ce plan est unique si A , B et C ne sont pas alignés).

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si A , B et C sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan $\mathcal{P}$ de l'espace contenant les points A , B et C (et ce plan est unique si A , B et C ne sont pas alignés). La norme dans ce plan est la même que la norme dans l'espace donc le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs de l'espace est le même que le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs du plan $\mathcal{P}$.

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si A , B et C sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan $\mathcal{P}$ de l'espace contenant les points A , B et C (et ce plan est unique si A , B et C ne sont pas alignés). La norme dans ce plan est la même que la norme dans l'espace donc le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs de l'espace est le même que le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Or, dans le plan $\mathcal{P}$, on peut parler de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si A , B et C sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan $\mathcal{P}$ de l'espace contenant les points A , B et C (et ce plan est unique si A , B et C ne sont pas alignés). La norme dans ce plan est la même que la norme dans l'espace donc le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs de l'espace est le même que le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Or, dans le plan $\mathcal{P}$, on peut parler de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Ainsi, on peut se ramener à l'expression du produit scalaire vu dans le plan :

Remarque 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si A , B et C sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan $\mathcal{P}$ de l'espace contenant les points A , B et C (et ce plan est unique si A , B et C ne sont pas alignés). La norme dans ce plan est la même que la norme dans l'espace donc le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs de l'espace est le même que le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Or, dans le plan $\mathcal{P}$, on peut parler de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Ainsi, on peut se ramener à l'expression du produit scalaire vu dans le plan :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (i.e. le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (i.e. le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et donc, en particulier, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A , B et C trois points de l'espace.

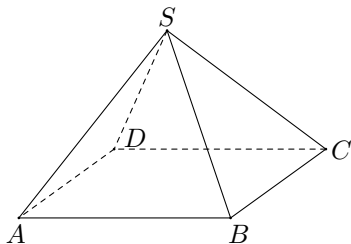
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (i.e. le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et donc, en particulier, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Exemple 4

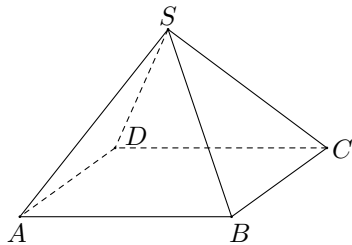
On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et dont toutes les arêtes ont la même longueur a .

Déterminer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

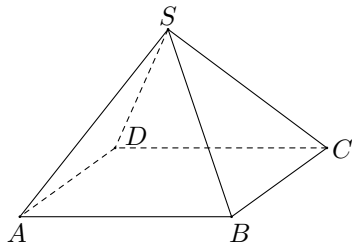
- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$;
c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$; d) $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$;
e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$; f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.



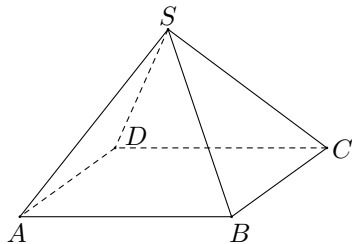
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

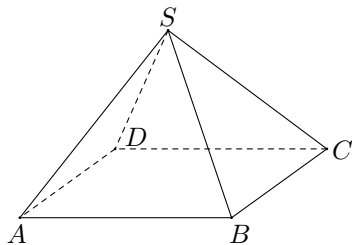


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$



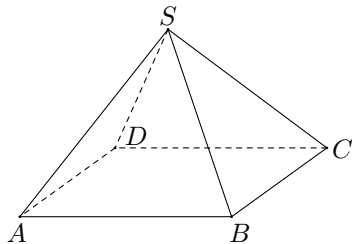
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$



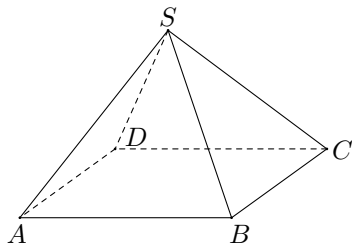
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$



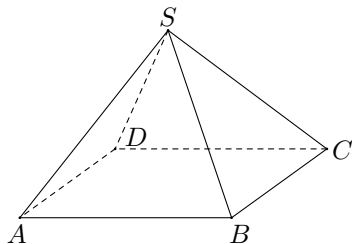
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$$



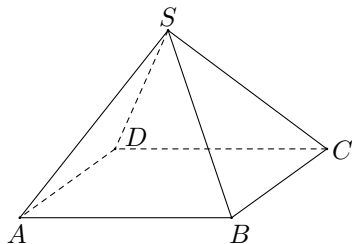
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ)$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

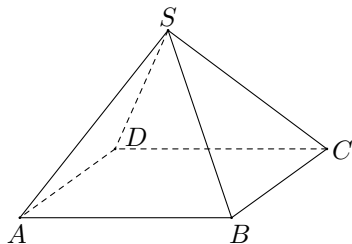
$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

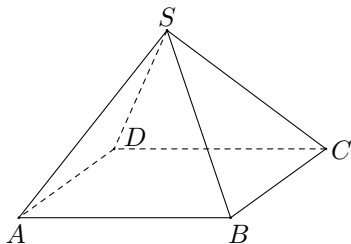
$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

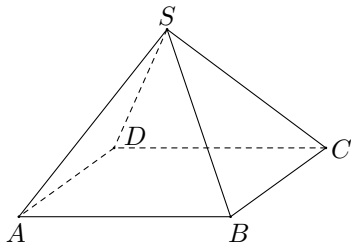
$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

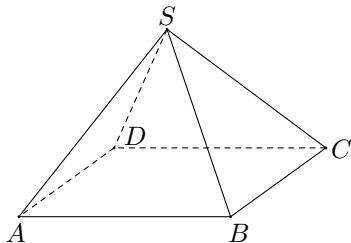
$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ)$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

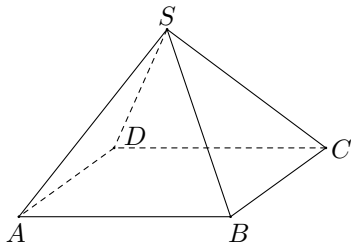


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

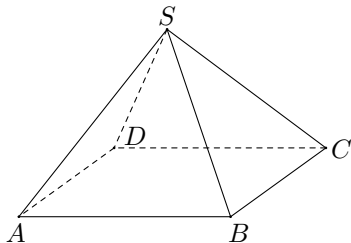


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

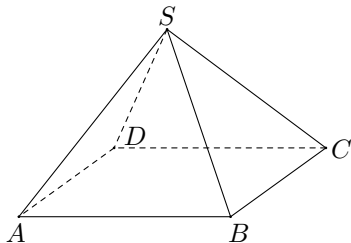


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD}$$

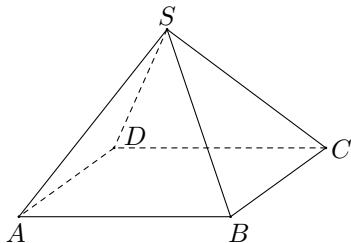


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD})$$

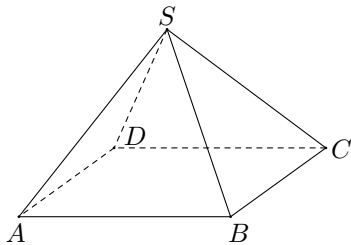


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ)$$

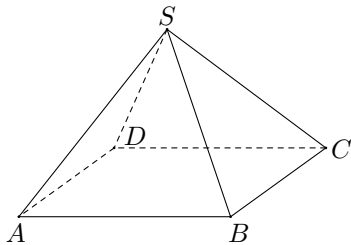


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

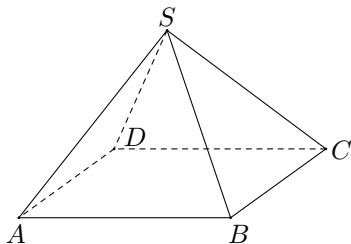


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$



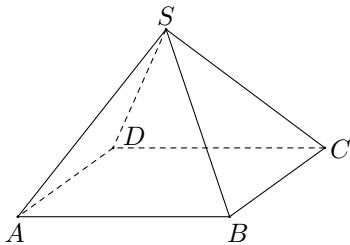
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{e) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC}).$$



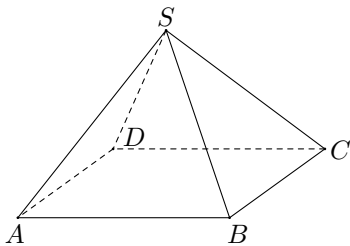
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{e) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC}). \text{ Or, } AS = AB, CS = CB \text{ et } AC = AC$$



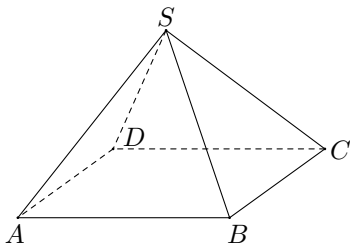
$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$. Or, $AS = AB$, $CS = CB$ et $AC = AC$ donc les triangles ASC et ABC sont isométriques.



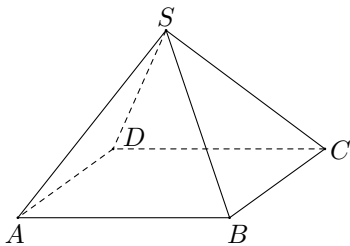
$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$c) \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$d) \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$. Or, $AS = AB$, $CS = CB$ et $AC = AC$ donc les triangles ASC et ABC sont isométriques. En particulier, $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$



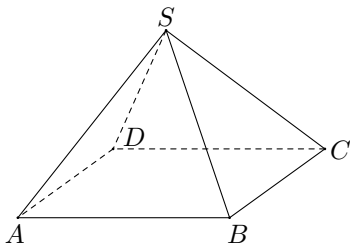
$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$c) \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$d) \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$. Or, $AS = AB$, $CS = CB$ et $AC = AC$ donc les triangles ASC et ABC sont isométriques. En particulier, $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.



$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

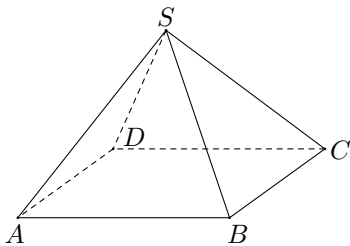
$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$c) \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$d) \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$. Or, $AS = AB$, $CS = CB$ et $AC = AC$ donc les triangles ASC et ABC sont isométriques. En particulier, $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

f) Comme A est le projeté orthogonal de D sur (AB) ,



$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

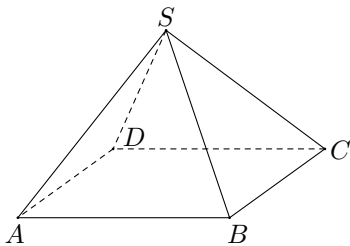
$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$c) \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$d) \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$. Or, $AS = AB$, $CS = CB$ et $AC = AC$ donc les triangles ASC et ABC sont isométriques. En particulier, $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

f) Comme A est le projeté orthogonal de D sur (AB) ,
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2$



$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

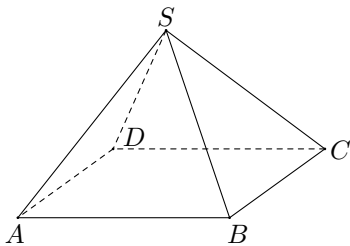
$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$c) \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$d) \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$. Or, $AS = AB$, $CS = CB$ et $AC = AC$ donc les triangles ASC et ABC sont isométriques. En particulier, $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

f) Comme A est le projeté orthogonal de D sur (AB) ,
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$.



Propriété 5

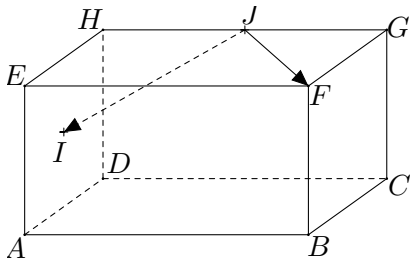
On suppose que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace. Alors,

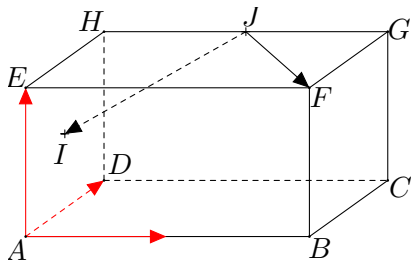
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exemple 6

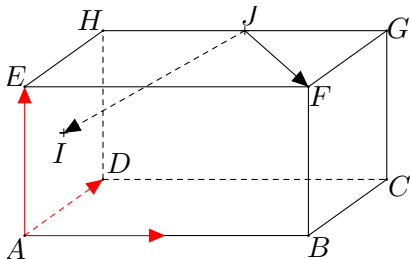
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ et $AB = 2$. On note I le centre du carré $ADHE$ et J le milieu de $[GH]$.

Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$. En déduire une valeur arrondie au dixième de degré près de $\widehat{IJF}$.



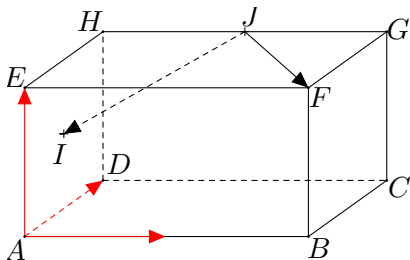


On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



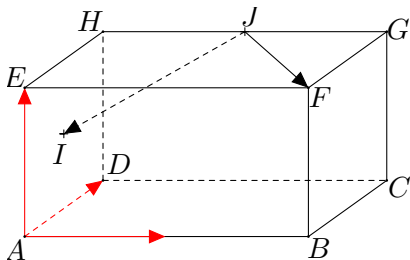
On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère,



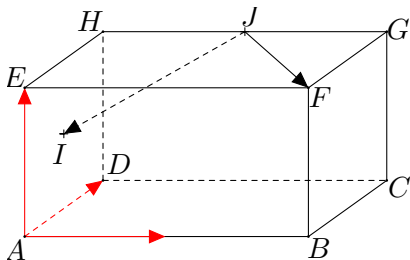
On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $J(1; 1; 1)$



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

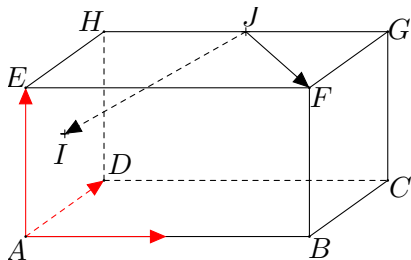
Dans ce repère, $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $J(1; 1; 1)$ et $F(2; 0; 1)$



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

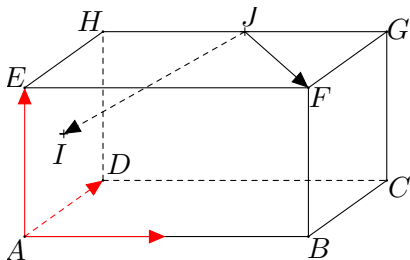
Dans ce repère, $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $J(1; 1; 1)$ et $F(2; 0; 1)$ donc

$$\overrightarrow{JI} \left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $J(1; 1; 1)$ et $F(2; 0; 1)$ donc $\overrightarrow{JI}(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{JF}(1; -1; 0)$.

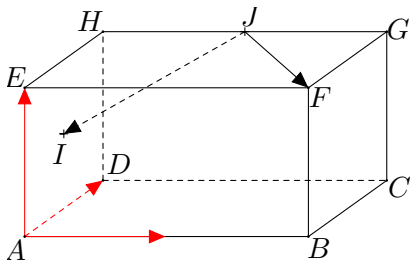


On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $J(1; 1; 1)$ et $F(2; 0; 1)$ donc

$\overrightarrow{JI}(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{JF}(1; -1; 0)$. Dès lors,

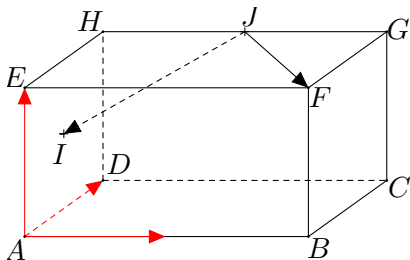
$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$$



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $J(1; 1; 1)$ et $F(2; 0; 1)$ donc $\overrightarrow{JI}(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{JF}(1; -1; 0)$. Dès lors,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = (-1) \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0$$



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $J(1; 1; 1)$ et $F(2; 0; 1)$ donc

$\overrightarrow{JI}(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{JF}(1; -1; 0)$. Dès lors,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = (-1) \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = -\frac{1}{2}.$$

Or, dans le plan (IJF),

Or, dans le plan (IJF) ,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

Or, dans le plan (IJF) ,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}}{JI \times JF}.$$

Or, dans le plan (IJF) ,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}}{JI \times JF}.$$

Comme le repère est orthonormé,

$$JI = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Or, dans le plan (IJF) ,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}}{JI \times JF}.$$

Comme le repère est orthonormé,

$$JI = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

et

$$JF = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}$$

Or, dans le plan (IJF),

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}}{JI \times JF}.$$

Comme le repère est orthonormé,

$$JI = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

et

$$JF = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2}}$$

Or, dans le plan (IJF),

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}}{JI \times JF}.$$

Comme le repère est orthonormé,

$$JI = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

et

$$JF = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$),

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v}$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) ;$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

À l'aide de la calculatrice (touche $\arccos$ ou $\arccos$ ou $\cos^{-1}$), on en déduit que $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$.

Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.
Alors :

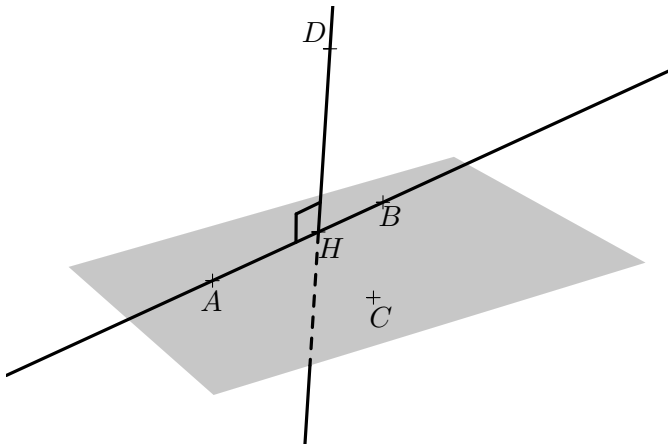
1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Exemple 8

Soit A , B , C et D quatre points de l'espace tels que $D \notin (AB)$.
Soit H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) dans le plan (ABD) . Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$.

Exemple 8

Soit A , B , C et D quatre points de l'espace tels que $D \notin (AB)$.
Soit H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) dans le plan (ABD) . Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$.



Grâce à la relation de Chasles,

Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HD})$$

Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD}$$

Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD}$$

Or, dans le plan (ABD), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont orthogonaux

Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD}$$

Or, dans le plan (ABD), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont orthogonaux
donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$

Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD}$$

Or, dans le plan (ABD), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$.

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 & \end{aligned}$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2$$

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ;$

3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$

Démonstration.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \quad \square$$