

## I. — Définition

### Définition 1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On définit le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$



Par définition, le produit scalaire de deux **vecteurs** est un **nombre réel** (positif, négatif ou nul).

*Remarque 2.* 1. Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , puisque  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ , on a donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  : on dit que le produit scalaire est symétrique (ou commutatif).

2. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$ .

3. Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  (et ce plan est unique si  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés). La norme dans ce plan est la même que la norme dans l'espace donc le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  en tant que vecteurs de l'espace est le même que le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  en tant que vecteurs du plan  $\mathcal{P}$ . Or, dans le plan  $\mathcal{P}$ , on peut parler de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$ . Ainsi, on peut se ramener à l'expression du produit scalaire vu dans le plan :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître.

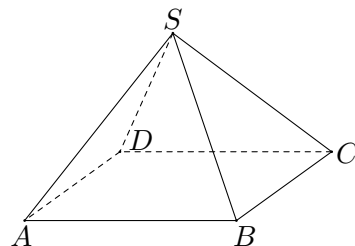
### Propriété 3

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace et  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de l'espace.

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ . En particulier,  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . Ce nombre est appelé le carré scalaire de  $\vec{u}$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de sens contraires alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .
- Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$  (i.e. le point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec la perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $C$ ) alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ .
- $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$  et donc, en particulier,  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$  et  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**Exemple 4.** On considère une pyramide  $SABCD$  à base carrée  $ABCD$  et dont toutes les arêtes ont la même longueur  $a$ . Déterminer, en fonction de  $a$ , les produits scalaires suivants :

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  ;    b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;  
 c)  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$  ;    d)  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$  ;  
 e)  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$  ;    f)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$  .



$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -a^2$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$$

$$c) \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$d) \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos(\widehat{SCD}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

e)  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \times \cos(\widehat{ASC})$ . Or,  $AS = AB$ ,  $CS = CB$  et  $AC = AC$  donc les triangles  $ASC$  et  $ABC$  sont isométriques. En particulier,  $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$  donc  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$ .

f) Comme  $A$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(AB)$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$ .

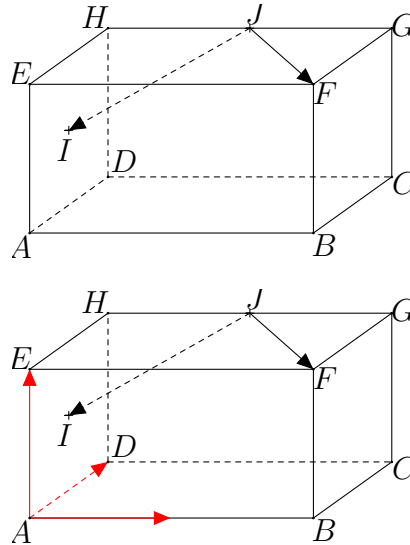
### Propriété 5

On suppose que l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  deux vecteurs de l'espace. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

**Exemple 6.** Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle tel que  $AD = AE = 1$  et  $AB = 2$ . On note  $I$  le centre du carré  $ADHE$  et  $J$  le milieu de  $[GH]$ .

Calculer  $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$ . En déduire une valeur arrondie au dixième de degré près de  $\widehat{IJF}$ .



On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

Dans ce repère,  $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ,  $J(1; 1; 1)$  et  $F(2; 0; 1)$  donc  $\overrightarrow{JI}(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$  et  $\overrightarrow{JF}(1; -1; 0)$ . Dès lors,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = (-1) \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = -\frac{1}{2}.$$

Or, dans le plan  $(IJF)$ ,

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF} = JI \times JF \times \cos(\widehat{IJF})$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}}{JI \times JF}.$$

Comme le repère est orthonormé,

$$JI = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

et

$$JF = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

donc

$$\cos(\widehat{IJF}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

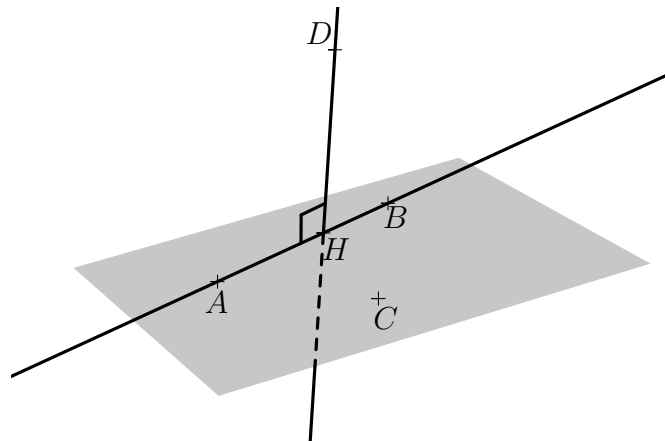
À l'aide de la calculatrice (touche **acos** ou **arccos** ou **cos<sup>-1</sup>**), on en déduit que  $\widehat{IJF} \approx 106,8^\circ$ .

### Propriété 7. — Règles de calcul

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace et  $k$  un nombre réel. Alors :

1.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$  ;
2.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

**Exemple 8.** Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  quatre points de l'espace tels que  $D \notin (AB)$ . Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $D$  sur la droite  $(AB)$  dans le plan  $(ABD)$ . Montrer que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$ .



Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD}$$

Or, dans le plan  $(ABD)$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{HD}$  sont orthogonaux donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$  donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$ .

### Propriété 9. — Identités remarquables

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Alors :

1.  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  ;
2.  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  ;
3.  $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ .

*Démonstration.*  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

□