

III. Théorème de de Moivre-Laplace et applications

III. Théorème de de Moivre-Laplace et applications

1) Théorème de de Moivre-Laplace

III. Théorème de de Moivre-Laplace et applications

1) Théorème de de Moivre-Laplace

On considère une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0; 1[$.

III. Théorème de de Moivre-Laplace et applications

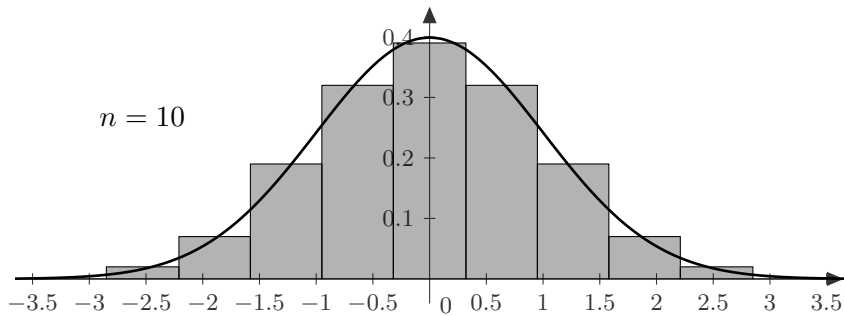
1) Théorème de de Moivre-Laplace

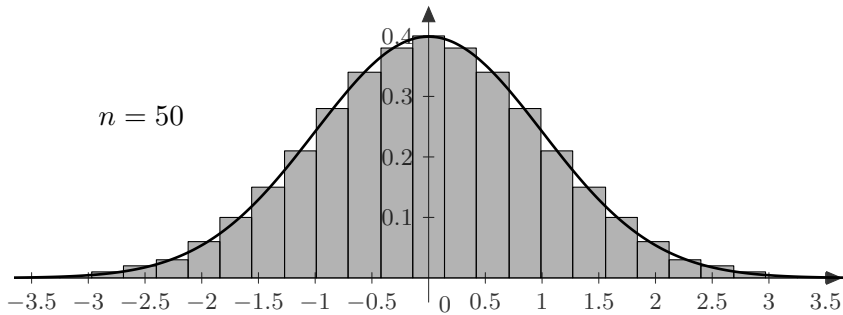
On considère une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0 ; 1[$. L'espérance de X_n est donc $\mu = np$ et l'écart-type de X_n est donc $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

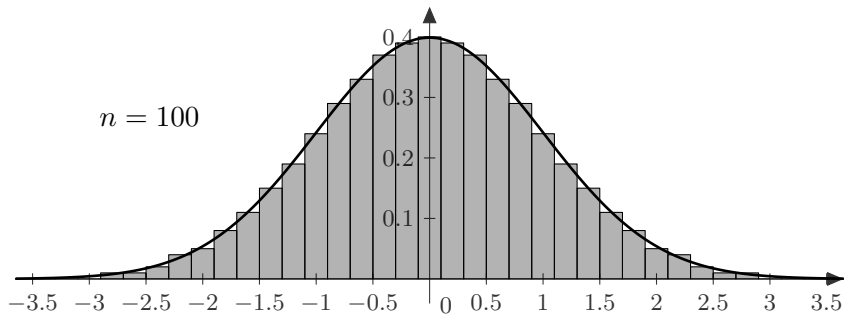
III. Théorème de de Moivre-Laplace et applications

1) Théorème de de Moivre-Laplace

On considère une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0 ; 1[$. L'espérance de X_n est donc $\mu = np$ et l'écart-type de X_n est donc $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. On considère la variable centrée réduite $Z_n = \frac{X - \mu}{\sigma}$ et on observe le comportement de la loi de probabilité de Z_n lorsque n augmente. Dans les exemples ci-dessous, on a choisi $p = 0,5$.







On constate que l'histogramme représentant la loi de probabilité de Z_n se rapproche de la courbe gaussienne centrée réduite.

On constate que l'histogramme représentant la loi de probabilité de Z_n se rapproche de la courbe gaussienne centrée réduite. Ceci est la traduction graphique du théorème suivant.

On constate que l'histogramme représentant la loi de probabilité de Z_n se rapproche de la courbe gaussienne centrée réduite. Ceci est la traduction graphique du théorème suivant.

Théorème 19. — Théorème de De Moivre-Laplace (admis)

Pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On constate que l'histogramme représentant la loi de probabilité de Z_n se rapproche de la courbe gaussienne centrée réduite. Ceci est la traduction graphique du théorème suivant.

Théorème 19. — Théorème de De Moivre-Laplace (admis)

Pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Remarque 20

Ce théorème peut se comprendre ainsi :

On constate que l'histogramme représentant la loi de probabilité de Z_n se rapproche de la courbe gaussienne centrée réduite. Ceci est la traduction graphique du théorème suivant.

Théorème 19. — Théorème de De Moivre-Laplace (admis)

Pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Remarque 20

Ce théorème peut se comprendre ainsi : si X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p alors, lorsque n devient grand, la loi de la variable $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2) Intervalle de fluctuation asymptotique et application

2) Intervalle de fluctuation asymptotique et application

Le but de ce paragraphe est le suivant :

2) Intervalle de fluctuation asymptotique et application

Le but de ce paragraphe est le suivant : on considère une expérience aléatoire et on s'intéresse à un événement particulier A dont la probabilité p est connue (ou supposée connue).

2) Intervalle de fluctuation asymptotique et application

Le but de ce paragraphe est le suivant : on considère une expérience aléatoire et on s'intéresse à un événement particulier A dont la probabilité p est connue (ou supposée connue). On réalise un grand nombre n de fois l'expérience et on note la fréquence f_n de réalisation de A i.e. le nombre de fois où A est réalisé divisé par n .

2) Intervalle de fluctuation asymptotique et application

Le but de ce paragraphe est le suivant : on considère une expérience aléatoire et on s'intéresse à un événement particulier A dont la probabilité p est connue (ou supposée connue). On réalise un grand nombre n de fois l'expérience et on note la fréquence f_n de réalisation de A i.e. le nombre de fois où A est réalisé divisé par n . Lorsque n devient grand, f_n converge vers p .

2) Intervalle de fluctuation asymptotique et application

Le but de ce paragraphe est le suivant : on considère une expérience aléatoire et on s'intéresse à un événement particulier A dont la probabilité p est connue (ou supposée connue). On réalise un grand nombre n de fois l'expérience et on note la fréquence f_n de réalisation de A i.e. le nombre de fois où A est réalisé divisé par n . Lorsque n devient grand, f_n converge vers p . On aimerait estimer la probabilité que f_n appartienne à un intervalle de la forme $[p - r ; p + r]$ (avec $r > 0$).

a) Intervalle de fluctuation asymptotique

a) Intervalle de fluctuation asymptotique

Si Y est une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et si $\alpha \in]0; 1[$, on note, comme dans le théorème 5, u_α l'unique réel tel que $\mathbf{P}(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

a) Intervalle de fluctuation asymptotique

Si Y est une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et si $\alpha \in]0; 1[$, on note, comme dans le théorème 5, u_α l'unique réel tel que $\mathbf{P}(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Théorème 21

Si une variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0; 1[$ alors, pour tout $\alpha \in]0; 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Démonstration. Notons que

$$\frac{X_n}{n} \in I_n$$

Démonstration. Notons que

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} - p \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} - p \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n^2}} \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} - p \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n}^2} \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n}} \leq u_\alpha \sqrt{p(1-p)}\end{aligned}$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} - p \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n}^2} \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n}} \leq u_\alpha \sqrt{p(1-p)} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n} \times \sqrt{p(1-p)}} \leq u_\alpha\end{aligned}$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} \in I_n &\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} - p \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n}^2} \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n}} \leq u_\alpha \sqrt{p(1-p)} \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{n} \times \sqrt{p(1-p)}} \leq u_\alpha \\&\Leftrightarrow -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on a

$$\left\{ \frac{X_n}{n} \in I_n \right\} = \{ -u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha \}.$$

Ainsi, en posant $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on a

$\left\{ \frac{X_n}{n} \in I_n \right\} = \{-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha\}$. Or, si on note Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, d'après le théorème de de Moivre-Laplace,

Ainsi, en posant $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on a

$\left\{ \frac{X_n}{n} \in I_n \right\} = \{-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha\}$. Or, si on note Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, d'après le théorème de de Moivre-Laplace,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha)$$

Ainsi, en posant $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on a

$\left\{ \frac{X_n}{n} \in I_n \right\} = \{-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha\}$. Or, si on note Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, d'après le théorème de de Moivre-Laplace,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha)$$

Ainsi, en posant $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on a

$\left\{ \frac{X_n}{n} \in I_n \right\} = \{-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha\}$. Or, si on note Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, d'après le théorème de de Moivre-Laplace,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

par définition de u_α .

Ainsi, en posant $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on a

$\left\{ \frac{X_n}{n} \in I_n \right\} = \{-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha\}$. Or, si on note Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, d'après le théorème de de Moivre-Laplace,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = \mathbf{P}(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

par définition de u_α . On conclut donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha.$$

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches.

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées.

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées. Lorsque n devient grand, cette fréquence se rapproche de p .

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées. Lorsque n devient grand, cette fréquence se rapproche de p . Ce que dit le théorème, c'est que pour n suffisamment grand, la fréquence F_n appartient à l'intervalle I_n avec une probabilité proche de $1 - \alpha$.

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées. Lorsque n devient grand, cette fréquence se rapproche de p . Ce que dit le théorème, c'est que pour n suffisamment grand, la fréquence F_n appartient à l'intervalle I_n avec une probabilité proche de $1 - \alpha$. On admet que c'est une bonne approximation si on a les conditions suivantes :

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées. Lorsque n devient grand, cette fréquence se rapproche de p . Ce que dit le théorème, c'est que pour n suffisamment grand, la fréquence F_n appartient à l'intervalle I_n avec une probabilité proche de $1 - \alpha$. On admet que c'est une bonne approximation si on a les conditions suivantes :

$$n \geq 30$$

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées. Lorsque n devient grand, cette fréquence se rapproche de p . Ce que dit le théorème, c'est que pour n suffisamment grand, la fréquence F_n appartient à l'intervalle I_n avec une probabilité proche de $1 - \alpha$. On admet que c'est une bonne approximation si on a les conditions suivantes :

$$n \geq 30 \quad np \geq 5$$

Interprétation. On suppose qu'une urne contient une proportion p de boules blanches. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. La variable aléatoire X_n égale au nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres n et p . La variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente alors la fréquence de boules blanches parmi les n boules tirées. Lorsque n devient grand, cette fréquence se rapproche de p . Ce que dit le théorème, c'est que pour n suffisamment grand, la fréquence F_n appartient à l'intervalle I_n avec une probabilité proche de $1 - \alpha$. On admet que c'est une bonne approximation si on a les conditions suivantes :

$$n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1 - p) \geq 5.$$

Définition 22

L'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance (ou au niveau de confiance) $1 - \alpha$ de la variable aléatoire F_n .

Définition 22

L'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance (ou au niveau de confiance) $1 - \alpha$ de la variable aléatoire F_n .

Exemple 23

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la variable aléatoire F_n est

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] .$$

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$,

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right]$$

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,134 ; 0,2] .$$

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,134 ; 0,2] .$$

Comme $u_{0,01} \approx 2,58$,

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,134 ; 0,2] .$$

Comme $u_{0,01} \approx 2,58$, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 99% pour la fréquence du nombre de 6 est

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,134 ; 0,2] .$$

Comme $u_{0,01} \approx 2,58$, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 99% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 2,58 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 2,58 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,123 ; 0,21] .$$

Exercice 24

On lance 500 fois un dé équilibré. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% de la fréquence de 6.

Même question en remplaçant 95% par 99%.

Dans cet exemple, $n = 500 \geq 30$, $p = \frac{1}{6}$ donc $np = \frac{250}{3} \geq 5$ et $n(1 - p) = \frac{1250}{3} \geq 5$.

On en déduit qu'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,134 ; 0,2] .$$

Comme $u_{0,01} \approx 2,58$, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 99% pour la fréquence du nombre de 6 est

$$\left[\frac{1}{6} - 2,58 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} ; \frac{1}{6} + 2,58 \frac{\sqrt{\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,123 ; 0,21] .$$

Remarque 25

Remarque 25

Pour être sûr que l'intervalle arrondi contienne l'intervalle de fluctuation asymptotique, on arrondit la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès (pour obtenir un intervalle légèrement plus grand que l'intervalle de fluctuation asymptotique).

b) Prise de décision

b) Prise de décision

Exemple 26

Dans un pays, on estime que 12% des habitants sont porteurs d'un caractère génétique g . On a effectué des tests sur un échantillon de 500 personnes dans deux villes A et B de ce pays. Sur les 500 personnes testées de la ville A, 71 sont porteurs du caractère g et sur les 500 personnes testées dans la ville B, 76 personnes sont porteurs du caractère g .

Peut-on affirmer que le nombre de porteurs du caractère est anormalement élevé dans la ville A ? dans la ville B ?

Règle de prise de décision.

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C .

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C . On souhaite tester l'hypothèse H : « la proportion du caractère C dans la population est p » à partir d'un échantillon de la population de taille n (avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$).

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C . On souhaite tester l'hypothèse H : « la proportion du caractère C dans la population est p » à partir d'un échantillon de la population de taille n (avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$). Pour cela,

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C . On souhaite tester l'hypothèse H : « la proportion du caractère C dans la population est p » à partir d'un échantillon de la population de taille n (avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$). Pour cela,

1. on fixe un seuil de risque α ;

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C . On souhaite tester l'hypothèse H : « la proportion du caractère C dans la population est p » à partir d'un échantillon de la population de taille n (avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$). Pour cela,

1. on fixe un seuil de risque α ;
2. on détermine I_n un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $1 - \alpha$ pour la fréquence et on suit la règle de décision suivante :

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C . On souhaite tester l'hypothèse H : « la proportion du caractère C dans la population est p » à partir d'un échantillon de la population de taille n (avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$). Pour cela,

1. on fixe un seuil de risque α ;
2. on détermine I_n un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $1 - \alpha$ pour la fréquence et on suit la règle de décision suivante :
 - si $f_n \in I_n$, on accepte l'hypothèse H ;

Règle de prise de décision. On considère une population dans laquelle on étudie un caractère C . On souhaite tester l'hypothèse H : « la proportion du caractère C dans la population est p » à partir d'un échantillon de la population de taille n (avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$). Pour cela,

1. on fixe un seuil de risque α ;
2. on détermine I_n un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $1 - \alpha$ pour la fréquence et on suit la règle de décision suivante :
 - ▶ si $f_n \in I_n$, on accepte l'hypothèse H ;
 - ▶ si $f_n \notin I_n$, on rejette l'hypothèse H avec un risque d'erreur α .

Pour l'exemple 26,

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$.

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici,
 $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$.

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici,
 $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$.
Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95%
est donc

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} =$$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right]$$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est f_A

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500}$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon)

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100}(1 - \frac{12}{100})}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100}(1 - \frac{12}{100})}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon) et, dans la ville B, la fréquence observée est

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon) et, dans la ville B, la fréquence observée est f_B

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100}(1 - \frac{12}{100})}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100}(1 - \frac{12}{100})}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon) et, dans la ville B, la fréquence observée est $f_B = \frac{76}{500}$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon) et, dans la ville B, la fréquence observée est $f_B = \frac{76}{500} = 0,152 \notin I_{500}$

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon) et, dans la ville B, la fréquence observée est $f_B = \frac{76}{500} = 0,152 \notin I_{500}$ donc on rejette, avec un risque d'erreur de 5%, l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon).

Pour l'exemple 26, fixons un seuil de risque $\alpha = 0,05$. Ici, $n = 500 \geq 30$ et $p = \frac{12}{100}$ donc $np = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 440 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95% est donc

$$I_{500} = \left[\frac{12}{100} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} ; \frac{12}{100} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{12}{100} \left(1 - \frac{12}{100}\right)}}{\sqrt{500}} \right] \\ \approx [0,091 ; 0,149] .$$

Or, dans la ville A, la fréquence observée est $f_A = \frac{71}{500} = 0,142 \in I_{500}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon) et, dans la ville B, la fréquence observée est $f_B = \frac{76}{500} = 0,152 \notin I_{500}$ donc on rejette, avec un risque d'erreur de 5%, l'hypothèse selon laquelle la répartition est normale (au vu de cet échantillon).

On conclut donc que le nombre de porteurs du caractère g est normal dans la ville A et anormalement élevé dans la ville B.

Remarque 27

Remarque 27

Le résultat de la prise de décision dépend évidemment du risque α choisi. Le choix de privilégier telle ou telle valeur de α repose sur des considérations extra-mathématiques.

3) Estimation par intervalle de confiance

3) Estimation par intervalle de confiance

Dans ce paragraphe, on se pose le problème « réciproque » du précédent. On suppose que, dans une population, on étudie un caractère C dont la proportion p est inconnue. On cherche à estimer p en calculant la fréquence sur un échantillon.

3) Estimation par intervalle de confiance

Dans ce paragraphe, on se pose le problème « réciproque » du précédent. On suppose que, dans une population, on étudie un caractère C dont la proportion p est inconnue. On cherche à estimer p en calculant la fréquence sur un échantillon.

Théorème 28

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0; 1[$. Alors, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\mathbf{P} \left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > 0,95$.

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$.

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après le propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après le propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$.

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) > 0,95$.

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) > 0,95$. Or, la fonction trinôme du second degré $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après le propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) > 0,95$. Or, la fonction trinôme du second degré $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $-\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$\mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) > 0,95$. Or, la fonction trinôme du second degré

$x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $-\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ et ce maximum vaut $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après la propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$\mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) > 0,95$. Or, la fonction trinôme du second degré

$x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $-\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ et ce maximum vaut $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

Démonstration. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons le réel α tel que $u_\alpha = 2$. D'après le propriété 17, $\mathbf{P}(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$ donc $1 - \alpha \geq 0,953$. Dès lors, par le théorème 21,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) \geq 0,953$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\mathbf{P} \left(\frac{X_n}{n} \in I_n \right) > 0,95$. Or, la fonction trinôme du second degré $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $-\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ et ce maximum vaut $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et, par croissance de la racine carrée, $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui revient à dire que I_n est inclus dans $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui revient à dire que I_n est inclus dans $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Dès lors, pour tout entier $n \geq N$,

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui revient à dire que I_n est inclus dans $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Dès lors, pour tout entier $n \geq N$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui revient à dire que I_n est inclus dans $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Dès lors, pour tout entier $n \geq N$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geq \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui revient à dire que I_n est inclus dans $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Dès lors, pour tout entier $n \geq N$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geq \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) > 0,95$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui revient à dire que I_n est inclus dans $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Dès lors, pour tout entier $n \geq N$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geq \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) > 0,95 \text{ i.e.}$$

$$\mathbf{P}\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Corollaire 29

On considère une population dans laquelle la proportion d'un caractère C est p . À tout échantillon de taille n de cette population, on associe la variable aléatoire fréquence F_n égale à la fréquence du caractère dans l'échantillon. Alors, pour n assez grand, la proportion p appartient à l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n - p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n - p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n \geq p - \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n - p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n \geq p - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n - p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n \geq p - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

donc $\mathbf{P}(p \in [F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}])$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n - p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq F_n \geq p - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

donc $\mathbf{P}(p \in [F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}]) = \mathbf{P}(\frac{X_n}{n} \in [p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}])$.

Or, d'après le théorème 28, pour n assez grand,

Or, d'après le théorème 28, pour n assez grand,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95$$

Or, d'après le théorème 28, pour n assez grand,

$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95$ donc, pour n assez grand, p appartient à l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Définition 30

On considère une population dans laquelle la proportion d'un caractère C est p et on note f la fréquence observée du caractère C dans un certain échantillon de taille n . Alors, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95%.

Définition 30

On considère une population dans laquelle la proportion d'un caractère C est p et on note f la fréquence observée du caractère C dans un certain échantillon de taille n . Alors, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95%.

Dans la pratique, on utilise cet intervalle si les conditions suivantes sont remplies :

Définition 30

On considère une population dans laquelle la proportion d'un caractère C est p et on note f la fréquence observée du caractère C dans un certain échantillon de taille n . Alors, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95%.

Dans la pratique, on utilise cet intervalle si les conditions suivantes sont remplies :

$$n \geq 30$$

Définition 30

On considère une population dans laquelle la proportion d'un caractère C est p et on note f la fréquence observée du caractère C dans un certain échantillon de taille n . Alors, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95%.

Dans la pratique, on utilise cet intervalle si les conditions suivantes sont remplies :

$$n \geq 30 \quad nf \geq 5$$

Définition 30

On considère une population dans laquelle la proportion d'un caractère C est p et on note f la fréquence observée du caractère C dans un certain échantillon de taille n . Alors, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95%.

Dans la pratique, on utilise cet intervalle si les conditions suivantes sont remplies :

$$n \geq 30 \quad nf \geq 5 \quad n(1 - f) \geq 5.$$

Exemple 31

Dans une population, une maladie touche une proportion p de personnes. On a testé 500 personnes et on a dépisté 45 personnes atteintes de cette maladie.

1. Donner un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95%.
2. Combien de personnes au minimum suffit-il tester pour connaître, au niveau de confiance 95%, la proportion p avec une précision au moins égale 0,01 ?

1. Ici, $n = 500 \geqslant 30$,

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right]$$

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

2. On cherche n tel que f soit, au niveau de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01 près.

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

2. On cherche n tel que f soit, au niveau de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01 près. Or, on sait que, au niveau de confiance 95%, p appartient à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

2. On cherche n tel que f soit, au niveau de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01 près. Or, on sait que, au niveau de confiance 95%, p appartient à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ i.e. f est une valeur approchée de p à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près.

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

2. On cherche n tel que f soit, au niveau de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01 près. Or, on sait que, au niveau de confiance 95%, p appartient à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ i.e. f est une valeur approchée de p à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près. Il suffit donc que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

2. On cherche n tel que f soit, au niveau de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01 près. Or, on sait que, au niveau de confiance 95%, p appartient à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ i.e. f est une valeur approchée de p à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près. Il suffit donc que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ i.e. $\sqrt{n} \geq 100$ i.e. $n \geq 10000$.

1. Ici, $n = 500 \geq 30$, $f = \frac{45}{500}$ donc $nf = 45 \geq 5$ et $n(1 - f) = 455 \geq 5$.

Un intervalle de confiance de la probabilité p au niveau de confiance 95% est donc

$$\left[\frac{45}{500} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{45}{500} + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,045 ; 0,135].$$

2. On cherche n tel que f soit, au niveau de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01 près. Or, on sait que, au niveau de confiance 95%, p appartient à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ i.e. f est une valeur approchée de p à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près. Il suffit donc que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ i.e. $\sqrt{n} \geq 100$ i.e. $n \geq 10000$.

Ainsi, pour que f fournisse, au seuil de confiance 95%, une valeur approchée de p à 0,01, il suffit de tester 10000 personnes.