

II. – Loi uniforme sur $[a; b]$

II. – Loi uniforme sur $[a ; b]$

Définition 8

Soit $a < b$ deux réels. On dit qu'une variable aléatoire X suit un loi uniforme sur $[a ; b]$ si la loi de X est la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$ sur $[a ; b]$.

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité.

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

$$1 = \int_a^b f(t) dt =$$

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

$$1 = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b c \, dt =$$

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

$$1 = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b c dt = c(b - a)$$

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

$$1 = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b c dt = c(b - a)$$

donc $c = \frac{1}{b-a}$.

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

$$1 = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b c dt = c(b - a)$$

donc $c = \frac{1}{b-a}$.

Elle est l'équivalent pour les probabilités continues de l'équirépartition pour les lois sur des ensembles finis.

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $]c; d[\subset [a; b]$,

$$\mathbf{P}(X \in]c; d[) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $]c; d[\subset [a; b]$,

$$\mathbf{P}(X \in]c; d[) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Démonstration.

Soit $]c; d[$ un intervalle inclus dans $[a; b]$. Alors,

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $]c; d[\subset [a; b]$,

$$\mathbf{P}(X \in]c; d[) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Démonstration.

Soit $]c; d[$ un intervalle inclus dans $[a; b]$. Alors,

$$P(X \in]c; d[) =$$

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $]c; d[\subset [a; b]$,

$$\mathbf{P}(X \in]c; d[) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Démonstration.

Soit $]c; d[$ un intervalle inclus dans $[a; b]$. Alors,

$$P(X \in]c; d[) = \int_c^d \frac{1}{b - a} dt =$$

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $]c; d[\subset [a; b]$,

$$\mathbf{P}(X \in]c; d[) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Démonstration.

Soit $]c; d[$ un intervalle inclus dans $[a; b]$. Alors,

$$P(X \in]c; d[) = \int_c^d \frac{1}{b - a} dt = \frac{1}{b - a} \times (d - c) =$$

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $]c; d[\subset [a; b]$,

$$\mathbf{P}(X \in]c; d[) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Démonstration.

Soit $]c; d[$ un intervalle inclus dans $[a; b]$. Alors,

$$P(X \in]c; d[) = \int_c^d \frac{1}{b - a} dt = \frac{1}{b - a} \times (d - c) = \frac{d - c}{b - a}.$$



Convention. On convient que « choisir un nombre au hasard dans un intervalle $[a; b]$ », c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a; b]$. En d'autres termes, si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre au hasard et si on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu alors X suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

Convention. On convient que « choisir un nombre au hasard dans un intervalle $[a; b]$ », c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a; b]$. En d'autres termes, si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre au hasard et si on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu alors X suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

Exemple 10

On choisit un réel au hasard dans $]0; 0,5[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu. Sachant que X est inférieur à 0,2, quelle est la probabilité que son deuxième chiffre après la virgule soit 1 ?

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.
Notons $J =]0; 0,2[$ et

$K =$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.
Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.
Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.
Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.
Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.

Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[\cup [0,41; 0,42[.$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.

Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[\cup [0,41; 0,42[.$$

Alors, la probabilité cherchée est

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.

Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[\cup [0,41; 0,42[.$$

Alors, la probabilité cherchée est

$$P_{(X \in J)}(X \in K) =$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.

Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[\cup [0,41; 0,42[.$$

Alors, la probabilité cherchée est

$$P_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{P(X \in J \cap K)}{P(X \in J)}$$
$$=$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.

Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[\cup [0,41; 0,42[.$$

Alors, la probabilité cherchée est

$$\begin{aligned} P_{(X \in J)}(X \in K) &= \frac{P(X \in J \cap K)}{P(X \in J)} \\ &= \frac{P(X \in [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[)}{P(X \in]0; 0,2[)} \end{aligned}$$

Or, les intervalles $[0,01; 0,02[$ et $[0,11; 0,12[$ sont disjoints donc

Or, les intervalles $[0,01; 0,02[$ et $[0,11; 0,12[$ sont disjoints donc

$$P_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{P(X \in [0,01; 0,02[) + P(X \in [0,11; 0,12[)}{P(X \in]0; 0,2[)}$$

Or, les intervalles $[0,01 ; 0,02[$ et $[0,11 ; 0,12[$ sont disjoints donc

$$\begin{aligned} P_{(X \in J)}(X \in K) &= \frac{P(X \in [0,01 ; 0,02[) + P(X \in [0,11 ; 0,12[)}{P(X \in]0 ; 0,2[)} \\ &= \frac{\frac{0,02-0,01}{0,5-0} + \frac{0,12-0,11}{0,5-0}}{\frac{0,2-0}{0,5-0}} \end{aligned}$$

Or, les intervalles $[0,01 ; 0,02[$ et $[0,11 ; 0,12[$ sont disjoints donc

$$\begin{aligned} P_{(X \in J)}(X \in K) &= \frac{P(X \in [0,01 ; 0,02[) + P(X \in [0,11 ; 0,12[)}{P(X \in]0 ; 0,2[)} \\ &= \frac{\frac{0,02-0,01}{0,5-0} + \frac{0,12-0,11}{0,5-0}}{\frac{0,2-0}{0,5-0}} \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Définition 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle $I =]a; b[$. On appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$.

Définition 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle $I =]a; b[$. On appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$.

Pour une loi sur un ensemble fini $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'espérance d'une variable aléatoire X est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Définition 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle $I =]a; b[$. On appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$.

Pour une loi sur un ensemble fini $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'espérance d'une variable aléatoire X est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Pour une variable à densité continue, la somme est remplacée par une intégrale, l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ par l'intervalle $[a; b]$, les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ par la variable t et la probabilité $P(X = x_i)$ par l'image de t par la densité f :

Définition 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle $I =]a; b[$. On appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$.

Pour une loi sur un ensemble fini $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'espérance d'une variable aléatoire X est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Pour une variable à densité continue, la somme est remplacée par une intégrale, l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ par l'intervalle $[a; b]$, les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ par la variable t et la probabilité $P(X = x_i)$ par l'image de t par la densité f :

$$\sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

$$\int_a^b t f(t) dt$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a + b}{2}$.

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$E(X) =$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b \end{aligned}$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)(b+a)}{2} \end{aligned}$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)(b+a)}{2} \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 13

Le temps d'attente en minutes à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant un loi uniforme sur $[0 ; 30]$.

1. Un client se présente au guichet. Quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes ?
2. Sachant qu'au bout de 10 minutes, le client n'a toujours pas été servi, quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes supplémentaires ?
3. Quel est le temps d'attente moyen à ce guichet ?

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) =$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) =$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} =$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) =$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30])$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) =$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = \frac{P(X \in [20; 30])}{P(X \in [10; 30])}$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = \frac{P(X \in [20; 30])}{P(X \in [10; 30])} = \frac{\frac{30-20}{30-0}}{\frac{30-10}{30-0}}$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = \frac{P(X \in [20; 30])}{P(X \in [10; 30])} = \frac{\frac{30-20}{30-0}}{\frac{30-10}{30-0}} = \frac{1}{2}.$$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = \frac{P(X \in [20; 30])}{P(X \in [10; 30])} = \frac{\frac{30-20}{30-0}}{\frac{30-10}{30-0}} = \frac{1}{2}.$$

3. Le temps d'attente moyen est $E(X) =$

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) &= P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) \\ &= \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])} \end{aligned}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = \frac{P(X \in [20; 30])}{P(X \in [10; 30])} = \frac{\frac{30-20}{30-0}}{\frac{30-10}{30-0}} = \frac{1}{2}.$$

3. Le temps d'attente moyen est $E(X) = \frac{0+30}{2} = 15$ minutes.