

Chapitre 16. — Lois normales et applications

I. Loi normale centrée réduite

I. Loi normale centrée réduite

Théorème 1. — (admis)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

I. Loi normale centrée réduite

Théorème 1. — (admis)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

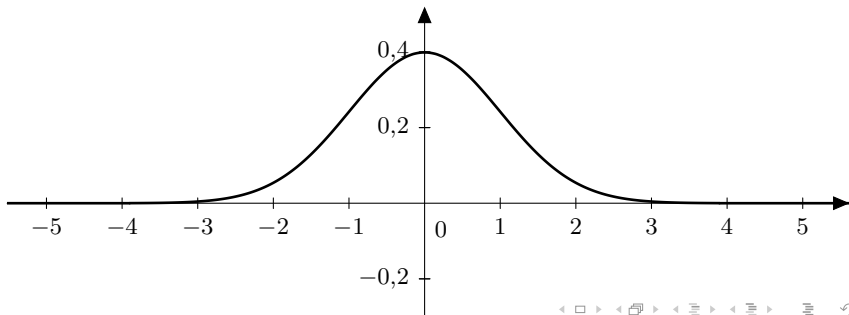
La courbe de la fonction f est la courbe suivante appelée courbe gaussienne ou courbe en « cloche ». La fonction f étant paire, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

I. Loi normale centrée réduite

Théorème 1. — (admis)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

La courbe de la fonction f est la courbe suivante appelée courbe gaussienne ou courbe en « cloche ». La fonction f étant paire, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de X est la fonction f .

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de X est la fonction f .

Autrement dit, X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$,

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de X est la fonction f .

Autrement dit, X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$,

$$1. \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ;$$

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de X est la fonction f .

Autrement dit, X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$,

$$1. \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ;$$

$$2. \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de X est la fonction f .

Autrement dit, X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$,

$$1. \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$2. \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$3. \mathbf{P}(X \geq b) = \mathbf{P}(X > b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_b^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de X est la fonction f .

Autrement dit, X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$,

$$1. \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$2. \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$3. \mathbf{P}(X \geq b) = \mathbf{P}(X > b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_b^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Rappels. Comme pour toute loi continue, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, pour tout réel a , $\mathbf{P}(X = a) = 0$.

Propriété 3

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Propriété 3

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

Comme la fonction densité f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété 3

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

Comme la fonction densité f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, l'aire sous la courbe sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ est la même que l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Propriété 3

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

Comme la fonction densité f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, l'aire sous la courbe sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ est la même que l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Autrement dit, $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0)$.

Propriété 3

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

Comme la fonction densité f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, l'aire sous la courbe sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ est la même que l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Autrement dit, $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0)$. De plus, $\mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(X \geq 0) = 1$ donc

$$\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}.$$



Calcul pratique. On ne connaît pas de primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Calcul pratique. On ne connaît pas de primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour calculer des probabilités en lien avec une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, le seul moyen à notre disposition est de déterminer des valeurs approchées à l'aide de la calculatrice.

Calcul pratique. On ne connaît pas de primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour calculer des probabilités en lien avec une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, le seul moyen à notre disposition est de déterminer des valeurs approchées à l'aide de la calculatrice. Celle-ci permet de calculer $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$.

Calcul pratique. On ne connaît pas de primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour calculer des probabilités en lien avec une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, le seul moyen à notre disposition est de déterminer des valeurs approchées à l'aide de la calculatrice. Celle-ci permet de calculer $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$.

	T.I.	Casio	NumWorks
Touches	2nde var 2	OPTN F5 F3 F1 F2	Menu Probabilités puis Normale
Affichage	<code>normalFRép(a,b,0,1)</code>	<code>NormCD(a,b,1,0)</code>	$P(\text{a} \leq X \leq \text{b}) = \text{ }$

Les calculatrices T.I. et Casio ne calculent que des probabilités du type $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$ (et donc aussi $\mathbf{P}(a < X \leq b)$, $\mathbf{P}(a \leq X < b)$ et $\mathbf{P}(a < X < b)$). Si on doit calculer une probabilité du type $\mathbf{P}(X \leq a)$ ou $\mathbf{P}(X \geq b)$, il faut s'y ramener en utilisant les propriétés de symétrie de la courbe de f .



Les calculatrices T.I. et Casio ne calculent que des probabilités du type $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$ (et donc aussi $\mathbf{P}(a < X \leq b)$, $\mathbf{P}(a \leq X < b)$ et $\mathbf{P}(a < X < b)$). Si on doit calculer une probabilité du type $\mathbf{P}(X \leq a)$ ou $\mathbf{P}(X \geq b)$, il faut s'y ramener en utilisant les propriétés de symétrie de la courbe de f .

Exemple 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} de $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1)$, $\mathbf{P}(X < 0,5)$ et $\mathbf{P}(X \geq 1)$, $\mathbf{P}(X < -0,8)$ et $\mathbf{P}(X \geq -0,3)$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) \approx 0,819$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leqslant 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leqslant 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leqslant 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leqslant 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = \mathbf{P}(X \geqslant 0) - \mathbf{P}(0 \leqslant X < 1)$

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leqslant 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = \mathbf{P}(X \geqslant 0) - \mathbf{P}(0 \leqslant X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leqslant X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leqslant X < 1) \approx 0,341$

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leq X < 1) \approx 0,341$ donc $\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0,159$.
- Pour la quatrième, on écrit $\mathbf{P}(X < -0,8) = \mathbf{P}(X \leq 0) - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0)$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leq X < 1) \approx 0,341$ donc $\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0,159$.
- Pour la quatrième, on écrit $\mathbf{P}(X < -0,8) = \mathbf{P}(X \leq 0) - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) \approx 0,288$

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leq X < 1) \approx 0,341$ donc $\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0,159$.
- Pour la quatrième, on écrit $\mathbf{P}(X < -0,8) = \mathbf{P}(X \leq 0) - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) \approx 0,288$ donc $\mathbf{P}(X < -0,8) \approx 0,212$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leq X < 1) \approx 0,341$ donc $\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0,159$.
- Pour la quatrième, on écrit $\mathbf{P}(X < -0,8) = \mathbf{P}(X \leq 0) - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) \approx 0,288$ donc $\mathbf{P}(X < -0,8) \approx 0,212$.
- Pour la cinquième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq -0,3) = \mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) + \mathbf{P}(X \geq 0) = \mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) + \frac{1}{2}$.

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leq X < 1) \approx 0,341$ donc $\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0,159$.
- Pour la quatrième, on écrit $\mathbf{P}(X < -0,8) = \mathbf{P}(X \leq 0) - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) \approx 0,288$ donc $\mathbf{P}(X < -0,8) \approx 0,212$.
- Pour la cinquième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq -0,3) = \mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) + \mathbf{P}(X \geq 0) = \mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) + \frac{1}{2}$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) \approx 0,118$

- Pour la première, la calculatrice donne directement $\mathbf{P}(-2 \leq X < 1) \approx 0,819$.
- Pour la seconde, on écrit $\mathbf{P}(X < 0,5) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X < 0,5) = \frac{1}{2} + \mathbf{P}(0 < X < 0,5)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 < X < 0,5) \approx 0,191$ donc $\mathbf{P}(X < 0,5) \approx 0,691$.
- Pour la troisième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 0) - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$ donc, par la propriété 3, $\mathbf{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(0 \leq X < 1)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(0 \leq X < 1) \approx 0,341$ donc $\mathbf{P}(X \geq 1) \approx 0,159$.
- Pour la quatrième, on écrit $\mathbf{P}(X < -0,8) = \mathbf{P}(X \leq 0) - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,8 \leq X \leq 0) \approx 0,288$ donc $\mathbf{P}(X < -0,8) \approx 0,212$.
- Pour la cinquième, on écrit $\mathbf{P}(X \geq -0,3) = \mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) + \mathbf{P}(X \geq 0) = \mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) + \frac{1}{2}$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice, $\mathbf{P}(-0,3 \leq X < 0) \approx 0,118$ donc $\mathbf{P}(X \geq -0,3) \approx 0,618$.

Théorème 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel u_α tel que

$$\mathbf{P}(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u)$$

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Alors, $0 < \alpha < 1$ donc $0 > -\alpha > -1$ i.e.

$$0 < 1 - \alpha < 1.$$

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Alors, $0 < \alpha < 1$ donc $0 > -\alpha > -1$ i.e.

$0 < 1 - \alpha < 1$. Dès lors, $\frac{1-\alpha}{2} \in]0; \frac{1}{2}[$

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Alors, $0 < \alpha < 1$ donc $0 > -\alpha > -1$ i.e.

$0 < 1 - \alpha < 1$. Dès lors, $\frac{1-\alpha}{2} \in]0; \frac{1}{2}[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $F(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Alors, $0 < \alpha < 1$ donc $0 > -\alpha > -1$ i.e.

$0 < 1 - \alpha < 1$. Dès lors, $\frac{1-\alpha}{2} \in]0; \frac{1}{2}[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $F(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$. Or, $F(u) = \frac{1-\alpha}{2}$ équivaut à $2F(u) = 1 - \alpha$ i.e. par définition, à $G(u) = 1 - \alpha$.

Démonstration.

On considère $G : u \mapsto \mathbf{P}(-u \leq X \leq u)$ définie sur $[0; +\infty[$. Par symétrie de la courbe de f , pour tout réel $u \geq 0$,

$$G(u) = 2\mathbf{P}(0 \leq X \leq u) \text{ i.e. } G : u \mapsto 2 \int_0^u f(t) dt.$$

Notons $F : u \mapsto \int_0^u f(t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental du chapitre 13, F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. De plus, pour tout réel u , $F'(u) = f(u) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Alors, $0 < \alpha < 1$ donc $0 > -\alpha > -1$ i.e.

$0 < 1 - \alpha < 1$. Dès lors, $\frac{1-\alpha}{2} \in]0; \frac{1}{2}[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $F(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$. Or, $F(u) = \frac{1-\alpha}{2}$ équivaut à $2F(u) = 1 - \alpha$ i.e. par définition, à $G(u) = 1 - \alpha$. On conclut que u_α est l'unique réel tel que $G(u_\alpha) = 1 - \alpha$ i.e. $\mathbf{P}(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$. $\square$

Calcul pratique. Étant donné $p \in]0; 1[$, la calculatrice permet de trouver une valeur approchée de l'unique réel c tel que $\mathbf{P}(X \leq c) = p$.

Calcul pratique. Étant donné $p \in]0; 1[$, la calculatrice permet de trouver une valeur approchée de l'unique réel c tel que $\mathbf{P}(X \leq c) = p$.

	T.I.	Casio	NumWorks
Touches	2nde var 3	OPTN F5 F3 F1 F3	Menu Probabilités puis Normale
Affichage	$\text{FracNormale}(p,0,1)$	$\text{InvNormCD}(p,1,0)$	$\text{P}(\boxed{} \leq X) = \boxed{p}$

Calcul pratique. Étant donné $p \in]0; 1[$, la calculatrice permet de trouver une valeur approchée de l'unique réel c tel que $\mathbf{P}(X \leq c) = p$.

	T.I.	Casio	NumWorks
Touches	2nde var 3	OPTN F5 F3 F1 F3	Menu Probabilités puis Normale
Affichage	$\text{FracNormale}(p,0,1)$	$\text{InvNormCD}(p,1,0)$	$\text{P}(\boxed{} \leq X) = \boxed{p}$

En utilisant la symétrie de la courbe de f , on peut en déduire u_α .

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95 \text{ donc } G(u) = 0,95 \text{ i.e.} \\ 2F(u) = 0,95$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$.

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,
 $\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05})$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,
 $\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05})$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,
 $\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,
 $\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

On utilise donc la calculatrice avec $p = 0,975$ et on trouve
 $u_{0,05} \approx 1,96$.

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

On utilise donc la calculatrice avec $p = 0,975$ et on trouve
 $u_{0,05} \approx 1,96$.

Par le même raisonnement, on a

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,01})$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

On utilise donc la calculatrice avec $p = 0,975$ et on trouve
 $u_{0,05} \approx 1,96$.

Par le même raisonnement, on a

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,01}) = 0,5 + \frac{1-0,01}{2}$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,

$\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

On utilise donc la calculatrice avec $p = 0,975$ et on trouve
 $u_{0,05} \approx 1,96$.

Par le même raisonnement, on a

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,01}) = 0,5 + \frac{1-0,01}{2} = 0,995$$

Propriété 6

On a les valeurs remarquables $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Autrement dit, si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mathbf{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \quad \mathbf{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Démonstration.

En reprenant les notations de la démonstration précédente,
 $\mathbf{P}(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$ donc $G(u) = 0,95$ i.e.
 $2F(u) = 0,95$ soit encore $F(u) = 0,475$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,05}) = \mathbf{P}(X \leq 0) + \mathbf{P}(0 < X \leq u_{0,05}) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

On utilise donc la calculatrice avec $p = 0,975$ et on trouve
 $u_{0,05} \approx 1,96$.

Par le même raisonnement, on a

$$\mathbf{P}(X \leq u_{0,01}) = 0,5 + \frac{1-0,01}{2} = 0,995 \text{ et on en déduit que } u_{0,01} \approx 2,58.$$



Remarque 7

Graphiquement, cela signifie qu'environ 95% de l'aire sous la courbe de f se trouve entre les abscisses $-1,96$ et $1,96$ et 99% de l'aire sous la courbe de f se trouve entre les abscisses $-2,58$ et $2,58$.

Définition 8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi ayant une densité continue g sur $\mathbb{R}$. Si les deux fonctions $x \mapsto \int_x^0 t \times g(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x t \times g(t) dt$ ont une limite finie respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$ alors on définit l'espérance de X par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t \times g(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times g(t) dt.$$

Définition 8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi ayant une densité continue g sur $\mathbb{R}$. Si les deux fonctions $x \mapsto \int_x^0 t \times g(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x t \times g(t) dt$ ont une limite finie respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$ alors on définit l'espérance de X par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t \times g(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times g(t) dt.$$

Si, de plus, la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on définit la variance de X par $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et l'écart-type de X par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 9

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

Démonstration.
Calcul de l'espérance.

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$.

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t f(t) dt$$

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u'e^u} dt$$

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u' e^u} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x\end{aligned}$$

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u'e^u} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]\end{aligned}$$

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u' e^u} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]\end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre x vers $+\infty$, $-\frac{x^2}{2}$ tend vers $-\infty$.

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u'e^u} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]\end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre x vers $+\infty$, $-\frac{x^2}{2}$ tend vers $-\infty$. Or, la fonction $\exp$ tend vers 0 en $-\infty$ donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Démonstration.

Calcul de l'espérance. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u' e^u} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]\end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre x vers $+\infty$, $-\frac{x^2}{2}$ tend vers $-\infty$. Or, la fonction $\exp$ tend vers 0 en $-\infty$ donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0. \text{ Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Soit maintenant $x < 0$.

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) \, dt$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) \, dt = - \int_0^x t f(t) \, dt$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) \, dt = - \int_0^x t f(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) \, dt = - \int_0^x t f(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]$$

donc, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$,

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) \, dt = - \int_0^x t f(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]$$

donc, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$, on conclut de même que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) \, dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) \, dt = - \int_0^x t f(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]$$

donc, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$, on conclut de même que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) \, dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

On conclut que X admet une espérance

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t f(t) dt = - \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right]$$

donc, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$, on conclut de même que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

On conclut que X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

Calcul de l'écart-type.

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.
Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt$$

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.
Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.

Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.

Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.
Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont $u' : t \mapsto -1$ et $v' : t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$.

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.

Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont $u' : t \mapsto -1$ et $v' : t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme ces dérivées sont continues, par la formule d'intégration par parties,

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.
Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont $u' : t \mapsto -1$ et $v' : t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme ces dérivées sont continues, par la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt$$

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.

Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont $u' : t \mapsto -1$ et $v' : t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme ces dérivées sont continues, par la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x u(t)v'(t) dt$$

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.
Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont $u' : t \mapsto -1$ et $v' : t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme ces dérivées sont continues, par la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x u(t)v'(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-1)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

Calcul de l'écart-type. Comme $E(X) = 0$, on a $V(X) = E(X^2)$.
Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-t) \times (-te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto -t$ et $v : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont $u' : t \mapsto -1$ et $v' : t \mapsto -te^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme ces dérivées sont continues, par la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 f(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x u(t)v'(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (-1)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$.

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$

et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$

et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0. \text{ De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ donc, par composition,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{P}(0 \leq X \leq x)$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{P}(0 \leq X \leq x)$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{P}(0 \leq X \leq x)$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{P}(0 \leq X)$

Remarquons que $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$. De plus, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{P}(0 \leq X \leq x)$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{P}(0 \leq X) = \frac{1}{2}$ par la propriété 3.

Soit maintenant $x < 0$.

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t^2 f(t) \, dt$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t^2 f(t) \, dt = - \int_0^x t^2 f(t) \, dt$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\int_x^0 t^2 f(t) \, dt = - \int_0^x t^2 f(t) \, dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) \, dt &= - \int_0^x t^2 f(t) \, dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.\end{aligned}$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0)$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0)$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par la propriété 3.

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par la propriété 3.

On conclut que X admet une variance

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par la propriété 3.

On conclut que X admet une variance qui vaut $V(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Soit maintenant $x < 0$. Alors, par le même calcul,

$$\begin{aligned}\int_x^0 t^2 f(t) dt &= - \int_0^x t^2 f(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(x \leq X \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par la propriété 3.

On conclut que X admet une variance qui vaut $V(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$.

Remarque 10

Cette proposition justifie le nom de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Elle est « centrée » car sa moyenne est nulle et elle est « réduite » car son écart-type vaut 1.

II. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

II. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 11

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la variable aléatoire Y définie par $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$-2 \leq X \leq 1$$

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$-2 \leq X \leq 1 \Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2$$

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$-2 \leq X \leq 1 \Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1$$

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Posons $Y = \frac{X-2}{3}$.

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Posons $Y = \frac{X-2}{3}$. Ainsi, $(-2 \leq X \leq 1) = (-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$.

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Posons $Y = \frac{X-2}{3}$. Ainsi, $(-2 \leq X \leq 1) = (-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$. Or, par définition, Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Posons $Y = \frac{X-2}{3}$. Ainsi, $(-2 \leq X \leq 1) = (-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$. Or, par définition, Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donc on peut calculer $\mathbf{P}(-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$ à l'aide de la calculatrice.

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Posons $Y = \frac{X-2}{3}$. Ainsi, $(-2 \leq X \leq 1) = (-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$. Or, par définition, Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donc on peut calculer $\mathbf{P}(-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$ à l'aide de la calculatrice. On trouve $\mathbf{P}(-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3}) \approx 0,278$

Exemple 12

Soit X une variable aléatoire suivant un loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Calculer $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1)$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} -2 \leq X \leq 1 &\Leftrightarrow -2 - 2 \leq X - 2 \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -4 \leq X - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{X - 2}{3} \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Posons $Y = \frac{X-2}{3}$. Ainsi, $(-2 \leq X \leq 1) = (-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$. Or, par définition, Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donc on peut calculer $\mathbf{P}(-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3})$ à l'aide de la calculatrice. On trouve $\mathbf{P}(-\frac{4}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3}) \approx 0,278$ et on conclut donc que $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 1) \approx 0,278$.

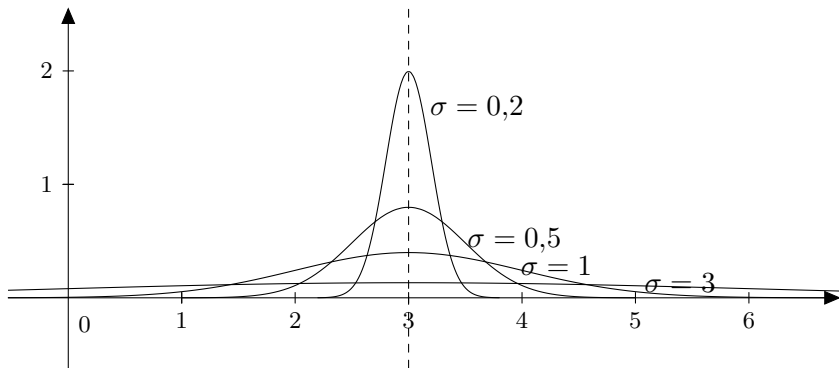
Propriété 13. — Admise

Si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors

1. X est une variable aléatoire à densité continue sur $\mathbb{R}$;
2. la courbe de la densité de X est une courbe « en cloche » symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$;
3. $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$.

Remarque 14

L'écart-type d'une variable aléatoire traduisant la dispersion des valeurs autour de la moyenne, plus σ est grand, plus la courbe est « étalée » et plus σ est petit, plus la courbe est « resserrée » autour de μ .



Remarque 15

Pour la même raison de symétrie de la courbe, si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$.

Calcul pratique. Comme pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, la calculatrice permet de calculer $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$ et de déterminer le réel c tel que $\mathbf{P}(X \leq c) = p$ si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

	T.I.	Casio	NumWorks
Calculer	2nde var 2	OPTN F5 F3 F1 F2	Menu Probabilités puis Normale
$\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$	<code>normalFRép(a,b,μ,σ)</code>	<code>NormCD(a,b,σ,μ)</code>	$\mathbf{P}(\text{a} \leq X \leq \text{b}) = \text{}$
Trouver c tel que	2nde var 3	OPTN F5 F3 F1 F3	Menu Probabilités puis Normale
$\mathbf{P}(X \leq c) = p$	<code>FracNormale(p,μ,σ)</code>	<code>InvNormCD(p,σ,μ)</code>	$\mathbf{P}(X \leq \text{ }) = \text{p}$

Calcul pratique. Comme pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, la calculatrice permet de calculer $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$ et de déterminer le réel c tel que $\mathbf{P}(X \leq c) = p$ si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

	T.I.	Casio	NumWorks
Calculer	2nde var 2	OPTN F5 F3 F1 F2	Menu Probabilités puis Normale
$\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$	<code>normalFRép(a,b,μ,σ)</code>	<code>NormCD(a,b,σ,μ)</code>	$\mathbf{P}(\text{a} \leq X \leq \text{b}) = \text{}$
Trouver c tel que	2nde var 3	OPTN F5 F3 F1 F3	Menu Probabilités puis Normale
$\mathbf{P}(X \leq c) = p$	<code>FracNormale(p,μ,σ)</code>	<code>InvNormCD(p,σ,μ)</code>	$\mathbf{P}(X \leq \text{ }) = \text{p}$



Il faut entrer dans la calculatrice l'écart-type σ et non pas la variance σ^2 .

Exemple 16

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(10, 25)$.

1. Calculer $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11)$, $\mathbf{P}(X \leq 12)$, $\mathbf{P}(X > 8)$, $\mathbf{P}(X < 9)$ et $\mathbf{P}(X \geq 11)$.
2. Déterminer c tel que $\mathbf{P}(X \leq c) = 0,7$ et d tel que $\mathbf{P}(X \geq d) = 0,8$.

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$.

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X < 9)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,

- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,

- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
- $\mathbf{P}(X \geq 11)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,

- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
- $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,

- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
- $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11) \approx \frac{1}{2} - 0,079$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,

- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
- $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
- $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$.

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
 - $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$.
2. On a directement $c \approx 12,622$.

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
 - $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$.
2. On a directement $c \approx 12,622$. Pour déterminer d , on peut remarquer que $\mathbf{P}(X \leq d)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
 - $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$.
2. On a directement $c \approx 12,622$. Pour déterminer d , on peut remarquer que $\mathbf{P}(X \leq d) = 1 - P(X \geq d)$

1. On a directement $\mathbf{P}(7 \leq X \leq 11) \approx 0,305$. Ensuite,
- $\mathbf{P}(X \leq 12) = \mathbf{P}(X \leq 10) + \mathbf{P}(10 < X \leq 12) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X > 8) = \mathbf{P}(8 < X < 10) + \mathbf{P}(X \geq 10) \approx \frac{1}{2} + 0,155 = 0,655$;
 - $\mathbf{P}(X < 9) = \mathbf{P}(X \leq 10) - \mathbf{P}(9 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$;
 - $\mathbf{P}(X \geq 11) = \mathbf{P}(X \geq 10) - \mathbf{P}(10 \leq X < 11) \approx \frac{1}{2} - 0,079 = 0,421$.
2. On a directement $c \approx 12,622$. Pour déterminer d , on peut remarquer que $\mathbf{P}(X \leq d) = 1 - P(X \geq d) = 0,2$ et donc $d \approx 5,792$.

Propriété 17

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors, pour tout réel $k > 0$, les probabilités des événements $(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$ sont indépendantes de μ et de σ .

En particulier,

$$\mathbf{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$\mathbf{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$$

$$\mathbf{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997.$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif.

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, par définition, Y suit une loi normale centrée réduite

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, par définition, Y suit une loi normale centrée réduite et on vient de montrer que

$$\mathbf{P}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P(-k \leq Y \leq k).$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, par définition, Y suit une loi normale centrée réduite et on vient de montrer que

$$\mathbf{P}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P(-k \leq Y \leq k).$$

Ensuite, à l'aide de la calculatrice, on trouve

$$P(-1 \leq Y \leq 1) \approx 0,683,$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, par définition, Y suit une loi normale centrée réduite et on vient de montrer que

$$\mathbf{P}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P(-k \leq Y \leq k).$$

Ensuite, à l'aide de la calculatrice, on trouve

$$P(-1 \leq Y \leq 1) \approx 0,683, P(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, par définition, Y suit une loi normale centrée réduite et on vient de montrer que

$$\mathbf{P}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P(-k \leq Y \leq k).$$

Ensuite, à l'aide de la calculatrice, on trouve

$$P(-1 \leq Y \leq 1) \approx 0,683, P(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954 \text{ et}$$

$$P(-3 \leq Y \leq 3) \approx 0,997$$

Démonstration.

Soit k un réel strictement positif. Alors,

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \Leftrightarrow -k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma \Leftrightarrow -k \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq k.$$

Posons $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, par définition, Y suit une loi normale centrée réduite et on vient de montrer que

$$\mathbf{P}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P(-k \leq Y \leq k).$$

Ensuite, à l'aide de la calculatrice, on trouve

$$P(-1 \leq Y \leq 1) \approx 0,683, P(-2 \leq Y \leq 2) \approx 0,954 \text{ et}$$

$$P(-3 \leq Y \leq 3) \approx 0,997 \text{ ce qui permet de conclure.}$$



Exemple 18

Par exemple, si X suit une loi $\mathcal{N}(5, 36)$ alors

$\mathbf{P}(-1 \leq X \leq 11) \approx 0,683$ car $-1 = 5 - 6 = \mu - \sigma$ et
 $11 = 5 + 6 = \mu + \sigma$.