

Correction du TD « Problèmes d'aires »

Exercice 1

1. Soit $x \in]0; 14]$. Alors, $\frac{x}{2} \leq 7$ donc, par croissance de $\ln$, $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \ln(7) < 2$ donc $f(x) > 0$.

Dès lors, l'aire du rectangle $OPMQ$ est $S(x) = xf(x) = 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Or, $S(2) = 4$ et $S(4) = 8 - 4 \ln(2) \approx 5,2$ donc $S(2) \neq S(4)$ et donc l'aire de $OPMQ$ n'est pas constante.

2. Considérons la fonction $S : x \mapsto 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ définie sur $]0; 14]$.

Cette fonction est dérivable sur $]0; 14]$ par composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \in]0; 14]$,

$$S'(x) = 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{\frac{x}{2}}\right) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; 14]$,

$$S'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq e \Leftrightarrow x \leq 2e.$$

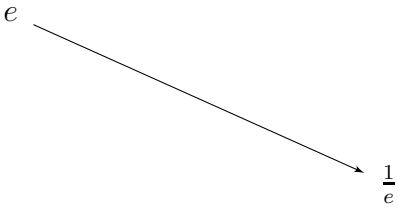
Comme $2e \in]0; 14]$, on en déduit que $S'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; 2e]$ et $S'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [2e; 14]$.

Par suite, S est croissante sur $]0; 2e]$ et décroissante sur $[2e; 14]$ donc S atteint son maximum en $2e$.

Ainsi, l'aire de $OPMQ$ est maximale pour $x = 2e$. Comme $f(2e) = 2 - \ln(e) = 1$, on conclut que les coordonnées du point M tel que l'aire de $OPMQ$ est maximale sont $(2e; 1)$.

Exercice 2

1. a. La fonction f est la composée de la fonction affine $x \mapsto -2x + 1$ suivie de la fonction $\exp$. Ces deux fonctions sont continues respectivement sur $[0; 1]$ et $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $[0; 1]$. De plus, comme la fonction $\exp$ est à valeurs strictement positives, f est positive sur $[0; 1]$.
- b. La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ par composition de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f'(x) = -2e^{-2x+1} < 0$ donc f est décroissante sur $[0; 1]$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	+	
Variation de f		

2. Soit $a \in [0; 1]$. Notons S_a l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites V_0 et V_a . Comme f est continue et positive sur $[0; a]$,

$$S_a = \int_0^a e^{-2x+1} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+1} \right]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-2a+1} - \left(-\frac{1}{2}e \right) = \frac{e - e^{-2a+1}}{2}.$$

En particulier, $\text{aire}(\mathcal{D}) = S_1 = \frac{e-e^{-1}}{2}$. Or, V_a sépare $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire si et seulement si

$$\begin{aligned} S_a = \frac{1}{2}S_1 &\Leftrightarrow \frac{e - e^{-2a+1}}{2} = \frac{e - e^{-1}}{4} \Leftrightarrow 2(e - e^{-2a+1}) = e - e^{-1} \\ &\Leftrightarrow e^{-2a+1} = \frac{e + e^{-1}}{2} \Leftrightarrow -2a + 1 = \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \left[1 - \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique réel a tel que la droite V_a sépare $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire est

$$\boxed{a = \frac{1}{2} \left[1 - \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) \right]}.$$

3. Soit $b \in [0; e]$. D'après le tableau de variation de f , si $b \leq \frac{1}{e}$ alors V_b est située en dessous de $\mathcal{C}_f$ donc V_b sépare $\mathcal{D}$ en deux parties dont l'une est un rectangle d'aire $b \times (1 - 0) = b$. Or, $\frac{1}{2}\text{aire}(\mathcal{D}) = \frac{e-e^{-1}}{4} \approx 0,59 > \frac{1}{e}$ donc, si $b \leq \frac{1}{e}$, $b < \frac{1}{2}\text{aire}(\mathcal{D})$ et ainsi la droite H_b ne sépare pas $\mathcal{D}$ en deux surfaces de même aire.

Si $b \in [\frac{1}{e}; e]$, d'après le tableau de variation de f , b admet un unique antécédent c par f . Ainsi, c est l'unique réel tel que $e^{-2c+1} = b$ i.e. $-2c + 1 = \ln(b)$ soit $c = \frac{1 - \ln(b)}{2}$. La droite H_b sépare alors $\mathcal{D}$ en deux surfaces telles que celle située au-dessus de H_b a une aire égale à $S_c - bc$ (l'aire sous la courbe moins l'aire du rectangle de largeur c et de hauteur b). Or, sachant que $e^{-2c+1} = b$, $S_c = \frac{e - e^{-2c+1}}{2} = \frac{e-b}{2}$ donc

$$S_c - bc = \frac{e-b}{2} - b \frac{1 - \ln(b)}{2} = \frac{e - 2b + b \ln(b)}{2}.$$

Ainsi, b est un réel tel que la droite H_b sépare $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire si et seulement si

$$\frac{e - 2b + b \ln(b)}{2} = \frac{1}{2}S_1 \Leftrightarrow e - 2b + b \ln(b) = \frac{e - e^{-1}}{2} \Leftrightarrow b \ln(b) - 2b = -\frac{e + e^{-1}}{2}.$$

Considérons la fonction $g : x \mapsto x \ln x - 2x$ définie sur $[\frac{1}{e}; e]$. Cette fonction est dérivable sur $[\frac{1}{e}; e]$ par produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [\frac{1}{e}; e]$,

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2 = \ln(x) - 1.$$

Or, pour $x \leq e$, $\ln(x) \leq 1$ donc, pour tout $x \in [\frac{1}{e}; e]$, $g'(x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x = e$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $[\frac{1}{e}; e]$. De plus, $g(\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e}$ et $g(e) = -e$. Étant donné que $-\frac{e+e^{-1}}{2} \approx -1,54$, que $-\frac{3}{e} \approx -1,1$ et que $-e \approx -2,72$, $-\frac{e+e^{-1}}{2}$ appartient à l'intervalle $[g(e); g(\frac{1}{e})]$. On déduit alors du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel b tel que $g(b) = -\frac{e+e^{-1}}{2}$. De plus, à l'aide de la calculatrice, on trouve $b \approx 0,625$.

Ainsi, il existe un unique réel b tel que H_b partage $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire et $b \approx 0,625$.