

Une introduction historique

Au XVI^e siècle, divers mathématiciens italiens (del Ferro, Tartaglia, Ferrari et Cardan) ont travaillé sur la résolution des équations du type $x^3 = px + q$ où p et q sont des nombres entiers. Dans son ouvrage *Ars Magna* (1545), Cardan montre qu'une telle équation a pour solution

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} \quad \text{avec } \Delta = 27q^2 - 4p^3$$

où $\sqrt[3]{a}$ désigne la racine cubique de a c'est-à-dire l'unique réel b tel que $b^3 = a$. Cette formule porte depuis le nom de formule de Cardan même si on pense que del Ferro l'avait découverte dès 1515.

Evidemment, la formule de Cardan n'a de sens que si $\Delta \geq 0$. Cependant, contrairement au cas du second degré, une équation du 3^{ième} degré admet toujours au moins une solution réelle (que Δ soit positif ou négatif). Ceci conduit le mathématicien Bombelli à essayer de donner un sens à la formule de Cardan même dans le cas où Δ est négatif. Dans son ouvrage *Algebra* (1572), il s'intéressa plus particulièrement à l'équation

$$x^3 = 15x + 4$$

pour laquelle $\Delta = -13068$ et donc $\frac{\Delta}{108} = -121 = -11^2$. Il eut alors l'idée d'inventer deux quantités imaginaires qu'il baptisa *pui di meno* (abrégé en *pdm*) et *meno di meno* (abrégé en *mdm*) qu'il considéra probablement comme de nouveaux signes (à ajouter aux traditionnels + (pu) et - (meno)) et il proposa une sorte de nouvelle « règle des signes » telle qu'on ait toujours

$$« + \text{ par } + = + », « + \text{ par } - = - » \text{ et } « - \text{ par } - = + »$$

mais également les nouvelles règles

$$« + \text{ par } pdm = pdm », « - \text{ par } pdm = mdm », « pdm \text{ par } pdm = - » \text{ et } « pdm \text{ par } mdm = + »$$

ainsi que

$$« + \text{ par } mdm = mdm », « - \text{ par } mdm = pdm », « mdm \text{ par } pdm = + » \text{ et } « mdm \text{ par } mdm = - »$$

Par la suite, la quantité *pdm* sera considérée comme un nombre *imaginaire* noté $\sqrt{-1}$ avant que le mathématicien suisse Euler ne lui donne sa notation définitive en lui attribuant en 1777 la lettre *i* (comme *imaginaire*). Avec cette notation (et en considérant *i* comme un nombre et non plus comme un « signe »), la quantité *mdm* correspond au nombre *imaginaire* $-i$ et les règles précédentes deviennent :

$$1 \times i = i, \quad (-1) \times i = -i, \quad i \times i = -1 \quad \text{et} \quad i \times (-i) = 1$$

et

$$1 \times (-i) = -i, \quad (-1) \times (-i) = i, \quad (-i) \times i = 1 \quad \text{et} \quad (-i) \times (-i) = -1.$$

En gardant ces notations bien postérieures (mais bien plus pratiques!), revenons alors à la formule de Cardan.

Etant donné que $i^2 = i \times i = -1$, $(11i)^2 = -121$ donc Bombelli considéra qu'on pouvait prendre pour $\sqrt{\frac{\Delta}{108}}$ le nombre *imaginaire* $11i$. La formule de Cardan devient donc

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Il restait alors à Bombelli à trouver un nombre A tel que $A^3 = 2 + 11i$ et un nombre B tel que $B^3 = 2 - 11i$. Ici, on ne sait pas vraiment comment il a procédé, probablement à tâtons, mais il trouve les valeurs

$$A = 2 + i \quad \text{et} \quad B = 2 - i.$$

Finalement, la formule de Cardan donne

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} = 2 + i + 2 - i = 4.$$

Or, on vérifie que

$$4^3 = 64 = 15 \times 4 + 4$$

donc, aussi étonnant que cela puisse paraître, l'introduction de ces quantités *imaginaires* conduit à trouver l'une des solutions réelles de $x^3 = 15x + 4$ (mais ce n'est pas la seule).

Par la suite, les nombres *imaginaires* et la notation *i* introduite par Euler seront popularisés par le mathématicien allemand Gauss qui les rebaptisera *nombres complexes* et généralisera ce qu'on appelle aujourd'hui la *forme algébrique* d'un nombre complexe.