Intégration par parties

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties.

1. $\displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$	**2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$	**3.** $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$	**4.** $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} (t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$	**6.** $\displaystyle\int_1^e t^{2020}\ln(t)\,\mathrm{d}t$	**7.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$	**8.** $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \ln^2(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto (x^3 - x)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 t^{2n+1}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \frac{e}{2} - (n+1)I_n$.

3. En déduire I_1, I_2 et I_3.

Exercice 5 (Intégrales de Wallis)**.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

5. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2}\pi$ et $I_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ (avec la convention $0! = 1$).

6. Déterminer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{k((2k)!)^2}$.