

Correction de l'interrogation écrite n°5 – Sujet A

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3)$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} + \sqrt{n} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

e) Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$ et $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Par somme, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin n \geq -1$ donc $u_n \geq 2n - 1$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$ donc, comme $n+1 > 0$, $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

Correction de l'interrogation écrite n°5 – Sujet B

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3)$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n}$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{(n+2) - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

e) Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^n}{3^n} + \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Comme $\frac{5}{3} > 1$ et $\frac{4}{3} > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$. Par somme, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos n \geq -1$ donc $u_n \geq 2n - 1$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$ donc, comme $n+1 > 0$, $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.