

Correction de l'interrogation écrite n°4 – Sujet A

Exercice 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(E_1) \Leftrightarrow iz - 1 = 0 \text{ ou } \bar{z} + 1 - 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{i} \text{ ou } \bar{z} = -1 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = -1 - 3i$$

l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{-i ; -1 - 3i\}$.

2. L'équation (E_2) est équivalente à $z^2 - z + 1 = 0$. Le discriminant de $z^2 - z + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Exercice 2. — L'affixe de D est $z_D = \frac{z_A + z_E}{2} = \frac{1 + i + 7 + 3i}{2}$ soit $z_D = 4 + 2i$.

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - 2i - (1 + i) = 2 - 3i$ et l'affixe de $\overrightarrow{DC}$ est $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 6 - i - (4 + 2i) = 2 - 3i$. Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ce qui permet d'affirmer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3

1. $Z = x + iy - 2(\overline{x + iy}) + i = x + iy - 2(x - iy) + i$ soit $Z = -x + (3y + 1)i$.

2. Z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(Z) = 0$ donc si et seulement si $x = 0$. Or, $x = \operatorname{Re}(z)$ donc $x = 0$ si et seulement si z imaginaire pur. On a donc montré que Z est imaginaire pur si et seulement si z est imaginaire pur.

Correction de l'interrogation écrite n°4 – Sujet B

Exercice 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(E_1) \Leftrightarrow iz + 1 = 0 \text{ ou } \bar{z} - 1 + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} \text{ ou } \bar{z} = 1 - 3i$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = 1 + 3i$$

l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{i ; 1 + 3i\}$.

2. L'équation (E_2) est équivalente à $z^2 - z + 1 = 0$. Le discriminant de $z^2 - z + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Exercice 2. — L'affixe de D est $z_D = \frac{z_A + z_E}{2} = \frac{-1 + i + 5 + 3i}{2}$ soit $z_D = 2 + 2i$.

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 - 2i - (-1 + i) = 2 - 3i$ et l'affixe de $\overrightarrow{DC}$ est $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 4 - i - (2 + 2i) = 2 - 3i$. Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ce qui permet d'affirmer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3

1. $Z = x + iy - 2(\overline{x + iy}) + i = x + iy - 2(x - iy) + i$ soit $Z = -x + (3y + 1)i$.

2. Z est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}(Z) = 0$ donc si et seulement si $x = 0$. Or, $x = \text{Re}(z)$ donc $x = 0$ si et seulement si z imaginaire pur. On a donc montré que Z est imaginaire pur si et seulement si z est imaginaire pur.