

Correction de l'interrogation écrite n°3 – Sujet A

Exercice 1

$$z_3 = 1 + i + 2 - 3i \text{ soit } \boxed{z_3 = 3 - 2i}.$$

$$z_4 = z_1 z_2 = (1 + i)(2 - 3i) = 2 - 3i + 2i + 3 \text{ soit } \boxed{z_4 = 5 - i}.$$

$$z_5 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{1^2 + 1^2} \text{ soit } \boxed{z_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}.$$

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{2 - 3i} = \frac{(1 + i)(2 + 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{2 + 3i + 2i - 3}{13} \text{ soit } \boxed{z_6 = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i}.$$

$$z_7 = \overline{1 + i + i(2 - 3i)} = \overline{1 + i + 2i + 3} = \overline{4 + 3i} \text{ soit } \boxed{z_7 = 4 - 3i}.$$

Exercice 2. — On peut écrire

$$z - \bar{z}(iz + 1) = z - i\bar{z}z - \bar{z} = z - \bar{z} - iz\bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) - iz\bar{z} = i(2 \operatorname{Im}(z) - z\bar{z}).$$

Or, par définition, $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et, par propriété, $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ donc $2 \operatorname{Im}(z) - z\bar{z}$ est un réel.

On peut donc conclure que $\boxed{z - \bar{z}(iz + 1) \text{ est un imaginaire pur}}.$

Correction de l'interrogation écrite n°3 – Sujet B

Exercice 1

$$z_3 = 1 - i + 2 + 3i \text{ soit } \boxed{z_3 = 3 + 2i}.$$

$$z_4 = z_1 z_2 = (1 - i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 2i + 3 \text{ soit } \boxed{z_4 = 5 + i}.$$

$$z_5 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{1^2 + 1^2} \text{ soit } \boxed{z_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}.$$

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{2 + 3i} = \frac{(1 - i)(2 - 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{2 - 3i - 2i - 3}{13} \text{ soit } \boxed{z_6 = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i}.$$

$$z_7 = \overline{1 - i + i(2 + 3i)} = \overline{1 - i + 2i - 3} = \overline{-2 + i} \text{ soit } \boxed{z_7 = -2 - i}.$$

Exercice 2. — On peut écrire

$$z(i\bar{z} + 1) - \bar{z} = iz\bar{z} + z - \bar{z} = iz\bar{z} + 2i \operatorname{Im}(z) = i(z\bar{z} + 2 \operatorname{Im}(z)).$$

Or, par définition, $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et, par propriété, $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ donc $2 \operatorname{Im}(z) + z\bar{z}$ est un réel.

On peut donc conclure que $\boxed{z - \bar{z}(iz + 1) \text{ est un imaginaire pur}}.$