

Correction de l'interrogation écrite n°2 – Sujet A

Exercice 1. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_n - 2 = n^2 - 4n + 6 - 2 = n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2 \geq 0$$

donc $u_n \geq 2$.

Ainsi, (u_n) est minorée par 2.

Exercice 2

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 3$ ».

Comme $u_0 = 1 \leq 3$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_k \leq 3$ donc $\frac{1}{3}u_k \leq 1$ (car $\frac{1}{3} > 0$) et ainsi $\frac{1}{3}u_k + 2 \leq 3$ i.e. $u_{k+1} \leq 3$.

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(3 - u_n).$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 3$ donc $3 - u_n \geq 0$ ce qui implique que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi, (u_n) est une suite croissante.

Exercice 3

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 - (n^2 - 2n + 3) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3 - n^2 + 2n - 3 = 2n - 1.$$

Or, $2n - 1 \geq 0$ si et seulement si $n \geq \frac{1}{2}$ donc (u_n) est croissante à partir du rang 1.

b) Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Alors, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

donc f est croissante sur $[0; +\infty[$. Etant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on en déduit que (u_n) est croissante.

Correction de l'interrogation écrite n°2 – Sujet B

Exercice 1. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_n - 1 = n^2 - 4n + 5 - 1 = n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2 \geq 0$$

donc $u_n \geq 2$.

Ainsi, (u_n) est minorée par 2.

Exercice 2

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 2$ ».

Comme $u_0 = 1 \leq 2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_k \leq 2$ donc $\frac{1}{2}u_k \leq 1$ (car $\frac{1}{2} > 0$) et ainsi $\frac{1}{2}u_k + 1 \leq 2$ i.e. $u_{k+1} \leq 2$.

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(2 - u_n).$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2$ donc $2 - u_n \geq 0$ ce qui implique que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi, (u_n) est une suite croissante.

Exercice 3

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 2 - (n^2 - 3n + 2) = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 2 - n^2 + 3n - 2 = 2n - 2.$$

Or, $2n - 2 \geq 0$ si et seulement si $n \geq 1$ donc (u_n) est croissante à partir du rang 1.

b) Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Alors, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1 \times (x+1) - (x+2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$. Etant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on en déduit que (u_n) est décroissante.