

Correction de l'interrogation écrite n°1 – Sujet A

Exercice 1

1. $u_1 = \frac{1}{2 - u_0} = \frac{1}{2 - 0}$ soit $\boxed{u_0 = \frac{1}{2}}$.

$$u_2 = \frac{1}{2 - u_1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{4 - 1} \text{ soit } \boxed{u_1 = \frac{2}{3}}.$$

$$u_3 = \frac{1}{2 - u_2} = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{6 - 2} \text{ soit } \boxed{u_2 = \frac{3}{4}}.$$

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : \ll u_n = \frac{n}{n+1} \gg$.

Comme $u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$, P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_k = \frac{k}{k+1}$ donc

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2(k+1)-k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$

donc P_{k+1} est vraie.

Ainsi, on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}}$.

Exercice 2

1. Par théorème, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - 2n}$.

2. Par théorème, $S = 51 \times \frac{u_0 + u_{50}}{2} = 51 \times \frac{3 + (3 - 2 \times 50)}{2}$ soit $\boxed{S = -2397}$.

Exercice 3

1. Comme (b_n) est géométrique, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, b_n = 3 \times 2^n}$.

2. On en déduit que $b_4 = 3 \times 2^4 = 3 \times 16$ i.e. $\boxed{b_4 = 48}$.

3. Comme (b_n) est géométrique,

$$S = \sum_{k=0}^9 b_k = b_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times \frac{-1023}{-1} = 3 \times 1023$$

i.e. $\boxed{S = 3069}$.

Correction de l'interrogation écrite n°1 – Sujet B

Exercice 1

1. $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{1+1}$ soit $\boxed{u_1 = \frac{1}{2}}$.

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2+1} \text{ soit } \boxed{u_2 = \frac{1}{3}}.$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3+1} \text{ soit } \boxed{u_3 = \frac{1}{4}}.$$

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : \ll u_n = \frac{1}{n+1} \gg$.

Comme $u_0 = 1$ et $\frac{1}{0+1} = 1$, P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_k = \frac{1}{k+1}$ donc

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+1+1}{k+1}} = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

donc P_{k+1} est vraie.

Ainsi, on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1}}$.

Exercice 2

1. Par théorème, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + 2n}$.

2. Par théorème, $S = 51 \times \frac{u_0 + u_{50}}{2} = 51 \times \frac{3 + (3 + 2 \times 50)}{2}$ soit $\boxed{S = 2703}$.

Exercice 3

1. Comme (b_n) est géométrique, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, b_n = 2 \times 3^n}$.

2. On en déduit que $b_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81$ i.e. $\boxed{b_4 = 162}$.

3. Comme (b_n) est géométrique,

$$S = \sum_{k=0}^7 b_k = b_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} = 2 \times \frac{1-3^8}{1-3} = 2 \times \frac{-6560}{-2}$$

i.e. $\boxed{S = 6560}$.