Révision sur les suites réelles (correction)

Exercice 6. — Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmétique telle que $u_5 = 3$ et $u_{20} = 33$.

1. Déterminer la raison et le premier terme u_0 de (u_n).

Comme (u_n) est arithmétique, pour tous entiers naturels p et n, $u_n = u_p + (n-p)r$ où r est la raison de la suite. En particulier, pour $p = 5$ et $n = 20$, on obtient $u_{20} = u_5 + (20-5)r$ i.e. $33 = 3 + 15r$ donc $r = \frac{30}{15} = 2$. Ainsi, la raison de (u_n) est $r = 2$.

De plus, en appliquant la formule précédente avec $p = 5$ et $n = 0$, on obtient $u_0 = u_5 + (0-5)\times 2 = 3 - 10 = -7$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -7 + 2n$.

3. Calculer $\sum\limits_{k=5}^{20} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$.

Comme (u_n) est arithmétique,

$$\sum_{k=5}^{20} u_k = 16 \times \frac{u_5 + u_{20}}{2} = 16 \times \frac{3+33}{2} = 288.$$

Exercice 7. — Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite géométrique telle que $u_5 = 1$ et $u_7 = 9$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour la raison q de $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

Comme (u_n) est géométrique, pour tous entiers naturels non nuls p et n, $u_n = u_p \times q^{n-p}$ où q est la raison de la suite. En particulier, pour $p = 5$ et $n = 7$, on obtient $u_7 = u_5 \times q^{7-5}$ i.e. $9 = 1 \times q^2$ donc $q^2 = 9$. On en déduit que $q = 3$ ou $q = -3$.

2. On suppose dorénavant que $q > 0$. Déterminer le premier terme u_1 de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Comme $q > 0$, la question précédente assure que $q = 3$. Ainsi, pour tous entiers naturels non nuls p et n, $u_n = u_p \times 3^{n-p}$ donc, en prenant $n = 1$ et $p = 5$, on obtient $u_1 = 1 \times 3^{1-5} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{81} \times 3^{n-1}$ i.e. $u_n = 3^{-4} \times 3^{n-1} = 3^{n-5}$.

4. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{5} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_5$.

Comme (u_n) est géométrique,

$$\sum_{k=1}^{5} u_k = u_1 \times \frac{1-3^5}{1-3} = \frac{1}{9} \times \frac{-242}{-2} = \frac{121}{81}.$$