

Corrigés des exercices donnés pour le vendredi 24 avril 2020

Recherche de primitives

Exercice 1.

1. La fonction F est dérivable sur I comme différence de 2 fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I .
2. La fonction F est dérivable sur I comme produit de 2 fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) = \cos x - x \sin x = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I .
3. La fonction F est dérivable sur I comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{2(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = f(x)$$

donc F est bien une primitive de f sur I .

4. La fonction F est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$, en remarquant que $x(x-1) = x^2 - x$, on a $F'(x) = - \left(- \frac{2x-1}{[x(x-1)]^2} \right) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I .

Exercice 2.

1. Les fonctions F et G sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$,

$$G(x) - F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1} = \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2 - 7x + 5}{x - 1} = \frac{-4x + 4}{x - 1} = 4.$$

Ainsi, F et G diffèrent d'une constante donc, comme I est un intervalle, on en déduit que F et G sont des primitives d'une même fonction sur I .

2. Les fonctions F et G sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$,

$$G(x) - F(x) = \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x}.$$

Or, pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$ et ainsi $G(x) - F(x) = \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} = -1$. Dès lors, F et G diffèrent d'une constante donc, comme I est un intervalle, on en déduit que F et G sont des primitives d'une même fonction sur I .

Exercice 3.

1. $F : x \mapsto \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$.
2. $F : x \mapsto \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3}$.

3. $F : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

Exercice 4.

1. $F : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

2. $F : x \mapsto \frac{3}{x}$.

3. $F : x \mapsto \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - x$.

Exercice 5.

1. $F : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{3x} - \sqrt{2}x$.

2. $F : x \mapsto 2\sqrt{x-1}$.

3. Pour tout $x \in I$, $\frac{2}{\sqrt{1-x}} = -2\frac{-1}{\sqrt{1-x}}$ donc $F : x \mapsto -4\sqrt{1-x} - x$.

Exercice 6. — Tous ces exemples se ramènent à des formes $u'u^n$.

1. $F : x \mapsto \frac{1}{4}(x+2)^4$.

2. $F : x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}(x-1)^6 = \frac{(x-1)^6}{18}$.

3. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x-1)^3$ donc $F : x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(2x-1)^4 = \frac{(2x-1)^4}{8}$.

4. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{2}{3} \times 3(3x-1)^5$ donc $F : x \mapsto \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}(3x-1)^6 = \frac{(3x-1)^6}{9}$.

Exercice 7. — Tous ces exemples se ramènent à des formes $\frac{u'}{u^n}$.

1. $F : x \mapsto -\frac{1}{2-1} \frac{1}{(x^2-x+3)^{2-1}} = -\frac{1}{x^2-x+3}$.

2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{(x^2-2x-3)^2}$ donc

$$F : x \mapsto \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2-1} \frac{1}{(x^2-2x-3)^{2-1}} \right) = -\frac{1}{2(x^2-2x-3)}.$$

3. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3x^2}{(x^3+8)^3}$ donc

$$F : x \mapsto \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3-1} \frac{1}{(x^3+8)^{3-1}} \right) = -\frac{2}{3(x^3+8)^2}.$$

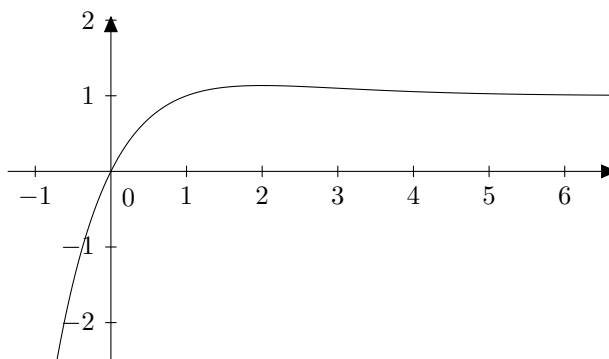
Exercice 8. — Tous ces exemples se ramènent à des formes $x \mapsto u(ax + b)$

1. $F : x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(2x)$.
2. $F : x \mapsto 3 \sin x + \cos(2x) + x$.
3. $F : x \mapsto -\frac{1}{-2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Exercice 1 de la fiche « Intégrales et primitives »

Exercice 1

1. Voici une courbe susceptible de représenter $\mathcal{C}_f$:



2.
 - a. Comme la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0; 2]$, on peut interpréter $g(2)$ comme l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
 - b. D'après le tableau de variation, pour tout $t \in [0; 2]$, $0 \leq f(t) \leq 1 + e^{-2}$ donc, d'après les inégalités de la moyenne, $0 \times (2 - 0) \leq \int_0^2 f(t) dt \leq (1 + e^{-2}) \times (2 - 0)$ i.e. $0 \leq g(2) \leq 2 + 2e^{-2}$. Or, $e \geq 2$ donc $e^2 \geq 4$ et, ainsi, $2 + 2e^{-2} \leq 2 + \frac{2}{4} = 2,5$. On conclut que $\boxed{0 \leq g(2) \leq 2,5}$.
3.
 - a. D'après le tableau de variation, pour tout $t \in [2; +\infty[$, $f(t) \geq 1$ donc, par les inégalités de la moyenne, $\int_2^x f(t) dt \geq 1 \times (x - 2)$ soit $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$. (En se rappelant bien que $x > 2$.)
D'après la relation de Chasles, $g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt$. Or, $\int_0^2 f(t) dt = g(2) \geq 0$ et $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$ donc $\boxed{g(x) \geq x - 2}$.
 - b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$.
4. Par théorème, la fonction g est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 donc, pour tout réel x , $g'(x) = f(x)$. Or, d'après le tableau de variation de f , $f(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 0$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ donc g est croissante sur $]-\infty; 0]$ et g est décroissante sur $[0; +\infty[$.