Exemples d'algorithmes

Exemple 1. — On considère la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n}$.

1. Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	8						

2. On souhaite écrire un algorithme qui permette de calculer la valeur de u_n pour une valeur de n donnée. On considère l'algorithme suivant :

```
u ← 8
Pour i allant de 1 à n
    | u ← (1/5)u + 1/3^i
Fin Pour
```

a. On fait fonctionner cet algorithme pour $n = 4$. Quelle est la valeur de la variable u à la fin de l'exécution ?

b. Expliquer pourquoi cet algorithme ne convient pas et proposer une modification qui permette d'obtenir l'affichage voulu.

Exemple 2. — On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1.$$

On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 1
S ← 1
K ← 0
Tant que K < N
    | U ← 2U − K + 1
    | S ← S + U
    | K ← K + 1
Fin Tant que
```

1. Faire fonctionner l'algorithme pour $N = 4$. On détaillera toutes les étapes en présentant les résultats sous forme d'un tableau.

2. Que représente, pour la suite (u_n), le nombre S obtenu à la fin de l'exécution de cet algorithme pour un entier naturel N donné ? (On ne demande pas de justification.)

Exemple 3. — On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$

On souhaite écrire un algorithme permettant d'afficher, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**

$v \leftarrow 1$
Pour i variant de 1 à n faire
    $v \leftarrow \frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
	Pour i variant de 1 à n faire
	    $v \leftarrow 1$
	    Afficher v
	    $v \leftarrow \frac{9}{6-v}$
	Fin pour
		$v \leftarrow 1$
		Pour i variant de 1 à n faire
		    Afficher v
		    $v \leftarrow \frac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v

Exemple 4. — On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

On considère l'algorithme suivant :

```
K ← 0
U ← 2
V ← 10
Tant que K < N
    K ← K + 1
    U ← (2U + V)/3
    V ← (U + 3V)/4
Fin tant que
```

1. Faire fonctionner l'algorithme pour $N = 3$. Expliquer pourquoi les valeurs de U et V à la fin de l'exécution ne sont pas égales à u_3 et v_3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Modifier l'algorithme précédent afin que U et V prennent les valeurs u_n et v_n lorsqu'on exécute cet algorithme avec $N = n$.