

Devoir à la maison n°3

À rendre le mardi 05 novembre 2019

Partie A. — On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par

$$f(x) = \frac{4x + 1}{2x + 3}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 5]$.
2. Justifier que, pour tout $x \in [0; 5]$, $0 \leq f(x) \leq 5$.

Partie B. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A**.

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs positives.
2. Calculer u_1 et u_2 (en détaillant les calculs).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5.$$

4. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ .
5. Déterminer ℓ .

Partie C. — On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A**.

On admet qu'on peut montrer, comme dans la question 1. de la partie **B**, que (v_n) est bien définie et à valeurs positives.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, conjecturer le comportement asymptotique de (v_n) . (On donnera un minimum de détails.)
2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - v_{n+1} = \frac{2}{2v_n + 3} (1 - v_n).$$

- b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. Démontrer ou infirmer la conjecture faite en question 1.

Partie D (facultatif). — Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de v_n en fonction de n .

Indication. — On pourra considérer la suite (w_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{2v_n - 2}{2v_n + 1}.$$