

Devoir à la maison n°2

Exercice 1

1. On considère l'équation

$$(E) : z^3 - 3(\sqrt{3} + i)z^2 + 9(1 + i\sqrt{3})z - 27i = 0$$

a. Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^3 - 3(\sqrt{3} + i)z^2 + 9(1 + i\sqrt{3})z - 27i$. Soit b un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(ib) &= (ib)^3 - 3(\sqrt{3} + i)(ib)^2 + 9(1 + i\sqrt{3})ib - 27i \\ &= -ib^3 - 3(\sqrt{3} + i)(-b^2) + 9(1 + i\sqrt{3})ib - 27i \\ &= -ib^3 + 3b^2\sqrt{3} + 3ib^2 + 9ib - 9b\sqrt{3} - 27i \\ &= 3b\sqrt{3}(b - 3) + i(-b^3 + 3b^2 + 9b - 27) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(ib) = 0$ et si et seulement si $3b\sqrt{3}(b - 3) = 0$ et $-b^3 + 3b^2 + 9b - 27 = 0$.

Or, $3b\sqrt{3}(b - 3)$ si et seulement si $b = 0$ ou $b = 3$. De plus, $-0^3 + 3 \times 0^2 + 9 \times 0 - 27 = -27 \neq 0$ et $-3^3 + 3 \times 3^2 + 9 \times 3 - 27 = 0$ donc ainsi $f(ib) = 0$ si et seulement si $b = 3$.

On conclut donc que $\boxed{3i \text{ est l'unique solution imaginaire pure de } (E)}$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} (z - 3i)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) &= z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 3iz^2 + 9i\sqrt{3}z - 27i \\ &= z^3 - 3(\sqrt{3} + i)z^2 + 9(1 + i\sqrt{3})z - 27i \\ &= f(z) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, f(z) = (z - 3i)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9)}$.

c. En utilisant le résultat de la question b.,

$$(E) \Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3i)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0 \Leftrightarrow z = 3i \text{ ou } z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$$

Soit $(F) : z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$. Le discriminant de (F) est $\Delta = (-3\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 9 = -9 < 0$ donc (F) admet deux solutions complexes conjuguées :

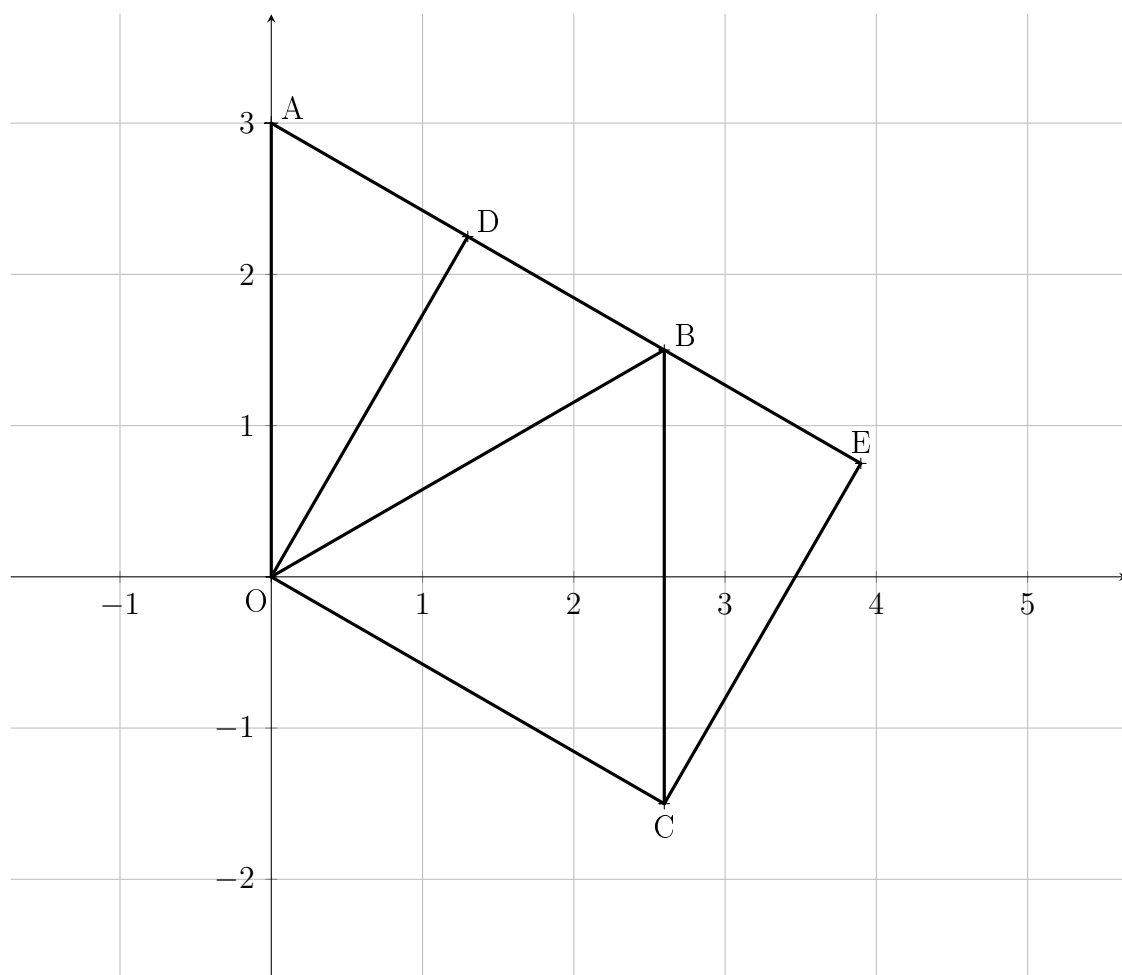
$$z_1 = \frac{-(-3\sqrt{3}) - i\sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ est } \left\{ 3i ; \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i ; \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right\}}$.

2. Dans toute la suite de l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3i \quad z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad z_C = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

a.



b. $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = z_B - \overline{z_B} = 2i \operatorname{Im}(z_A) = 3i$ donc $z_{\overrightarrow{CB}} = z_A = z_{\overrightarrow{OA}}$. Ainsi, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$ ce qui prouve que OABC est un parallélogramme.

c. Par propriété,

$$z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3i + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i}{2}$$

donc $z_D = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4}i$.

d. Le quadrilatère ODEC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CE}$ ce qui équivaut à $z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{CE}}$. Or,

$$z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{CE}} \Leftrightarrow z_D = z_E - z_C \Leftrightarrow z_E = z_D + z_C \Leftrightarrow z_E = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

donc l'abscisse du point E tel que ODEC est un parallélogramme est $z_E = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.

3. a. Soit deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ d'abscisses respectives z et z' . Écrivons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sous formes algébriques. Alors,

$$z\overline{z'} = (x + iy)(x' - iy') = xx' - ixy' + iyx' + yy' = (xx' + yy') + i(x'y - xy')$$

Dès lors,

$$z\overline{z'} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z\overline{z'}) = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \vec{w} \perp \vec{w'}.$$

Ainsi, on a bien montré que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{w'}$ si et seulement si $z\overline{z'}$ est imaginaire pur.

b. Comme $z_{\overrightarrow{OC}} = z_C = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ et $z_{\overrightarrow{OD}} = z_D = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4}i$, on a

$$z_{\overrightarrow{OC}}\overline{z_{\overrightarrow{OD}}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4}i\right) = \frac{27}{8} - \frac{27\sqrt{3}}{8}i - \frac{9\sqrt{3}}{8}i - \frac{27}{8} = -\frac{9\sqrt{3}}{2}i$$

donc $z_{\overrightarrow{OC}}\overline{z_{\overrightarrow{OD}}} \in i\mathbb{R}$ ce qui montre, d'après la question a., que $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$. Ainsi, $(OC) \perp (OD)$ i.e. le parallélogramme ODEC possède un angle droit ce qui assure donc que ODEC est un rectangle.

De même, comme $z_{\overrightarrow{OB}} = z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i - 3i = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}i$, on a

$$z_{\overrightarrow{OB}}\overline{z_{\overrightarrow{AC}}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i\right) = \frac{27}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{4}i + \frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{27}{4} = 9\sqrt{3}i$$

donc $z_{\overrightarrow{OB}}\overline{z_{\overrightarrow{AC}}} \in i\mathbb{R}$ ce qui montre, d'après la question a., que $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$. Ainsi, $(OB) \perp (AC)$ i.e. les diagonales du parallélogramme OABC sont perpendiculaires donc OABC est un losange.

c. On a vu que le triangle ODA est un triangle rectangle en D donc $OD < OA$. De plus, OABC est un losange donc $OA = OC$. Ainsi, $OD < OC$ ce qui montre que le rectangle ODEC n'est pas un carré.

Exercice 2. — Soit z un complexe non nul. Les points $M(z)$, $A(1)$ et $N(\frac{1}{z^2})$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Remarquons que

$$z_{\overrightarrow{AN}} = z_N - z_A = \frac{1}{z^2} - 1 = \frac{1 - z^2}{z^2} = \frac{(1 - z)(1 + z)}{z^2} = -\frac{z + 1}{z^2}(z - 1) = -\frac{z + 1}{z^2}z_{\overrightarrow{AM}}.$$

Distinguons deux cas.

1^{er} cas. — Si $z_{AM} = 0$ i.e. si $M = A$ alors les points A, M et N sont alignés.

2^e cas. — Si $z_{AM} \neq 0$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires si et seulement si $-\frac{z+1}{z^2}$ est un réel ce qui équivaut à dire que $\frac{z+1}{z^2}$ est un réel.

Écrivons z sous forme algébrique $z = a + ib$. Alors,

$$\frac{z + 1}{z^2} = \frac{a + ib + 1}{(a + ib)^2} = \frac{[(a + 1) + ib](a - ib)^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{[(a + 1) + ib](a^2 - 2iab - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} [(a + 1) + ib](a^2 - 2iab - b^2) &= [(a + 1) + ib][(a^2 - b^2) - 2iab] \\ &= (a + 1)(a^2 - b^2) - 2i(a + 1)ab + ib(a^2 - b^2) + 2ab^2 \\ &= (a + 1)(a^2 - b^2) + 2ab^2 + ib(-2a(a + 1) + a^2 - b^2) \\ &= (a + 1)(a^2 - b^2) + 2ab^2 + ib(-a^2 - b^2 - 2a) \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z+1}{z^2} \right) = -\frac{b(a^2 + b^2 + 2a)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} b(a^2 + b^2 + 2a) = 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ ou } (a+1)^2 - 1 + b^2 = 0 \\ (a, b) \neq (0, 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ ou } (a - (-1))^2 + (b - 0)^2 = 1^2 \\ (a, b) \neq (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z+1}{z^2}$ est la réunion de l'axe des abscisses et du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon 1 privée de l'origine O du repère.

On remarque que A appartient à cet ensemble donc le second cas inclus le premier.

On conclut donc que l'ensemble des points M tels que A , M et N soient alignés est la réunion de l'axe des abscisses et du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon 1 privée de l'origine O du repère.