

Devoir à la maison n°2

À rendre le vendredi 4 octobre 2019

Les copies doivent être propres et lisibles. L'usage du correcteur blanc est à limiter au maximum et les copies comportant plus de 5 ratures sont susceptibles de ne pas être corrigées. Les copies doivent être rédigées dans un français correct. Aucune abréviation n'est acceptée sauf si elle figure dans le dictionnaire (par exemple, « c-à-d » pour « c'est-à-dire » ou « i.e. » pour « id est »). Les questions doivent être traitées dans l'ordre et numérotées comme dans l'énoncé. La copie doit être aérée en sautant des lignes pour séparer les différentes parties. Les résultats de chaque question doivent être clairement mis en évidence en étant encadrés ou soulignés.

Les copies ne respectant par ces consignes sont susceptibles de ne pas être corrigées.

Exercice 1

1. On considère l'équation

$$(E) : z^3 - 3(\sqrt{3} + i)z^2 + 9(1 + i\sqrt{3})z - 27i = 0$$

- a. Démontrer que (E) admet une unique solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
- b. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - 3(\sqrt{3} + i)z^2 + 9(1 + i\sqrt{3})z - 27i = (z - z_0)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9)$$

- c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
2. Dans toute la suite de l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3i \quad z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad z_C = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

- a. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.
 - b. Montrer que OABC est un parallélogramme.
 - c. On note D le milieu de [AB]. Déterminer l'affixe du point D.
 - d. Déterminer l'affixe du point E tel que ODEC soit un parallélogramme.
3. On rappelle que si $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont deux vecteurs du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') alors $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
- a. Montrer que deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ d'affixes respectives z et z' sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est imaginaire pur.
 - b. En déduire, d'une part, que ODEC est un rectangle et, d'autre part, que OABC est un losange.
 - c. Sans calculer de longueurs, dire si le rectangle ODEC est un carré ou non.

Exercice 2 (facultatif). — Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \neq 0$ tels que M soit aligné avec les points A d'affixe 1 et N d'affixe $\frac{1}{z^2}$.