

## Devoir à la maison n°1

À rendre le mardi 17 septembre 2019

**Exercice 1.** — On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1}(2n+1) - u_n.$$

1. **a.** Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .  
**b.** Conjecturer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = u_n - (-1)^n n^2$ .  
**a.** Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.  
**b.** En déduire une démonstration de la conjecture faite en question **1.b.**
3. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \sum_{j=0}^n u_j \quad \text{i.e.} \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

- a.** Calculer  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$ .
- b.** Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. On se propose de retrouver le résultat précédent sans utiliser de raisonnement par récurrence et sans utiliser les résultats des questions **1.** et **2.**.  
**a.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Justifier que si  $k$  est impair alors  $u_k + u_{k+1} = 2k + 1$  et si  $k$  est pair alors  $u_k + u_{k+1} = -(2k + 1)$ .  
**b.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier pair. Ainsi, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2m$ . Montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^m (4k - 1).$$

*Indication.* On pourra calculer  $S_n$  en rassemblant les termes consécutifs 2 par 2 :  
 $S_n = u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2m-1} + u_{2m})$ .

- c.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier impair. Ainsi, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2m + 1$ . Montrer que

$$S_n = - \sum_{k=0}^m (4k + 1).$$

- d.** Retrouver, en utilisant seulement les deux questions précédentes, le résultat de la question **3.b.**

**Exercice 2 (facultatif).** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\sum_{j=1}^n j2^{j-1}$ .